

CONTRIBUIÇÕES DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES

Denise Fabiana Figueiredo

denise-fab@hotmail.com

Rosana Viomar de Lima

rosanalima@unicentro.br

Lilian Akemi Kato

lilianakato@hotmail.com

LINHA DE PESQUISA

Modelagem Matemática

RESUMO

O objetivo desse trabalho foi investigar as dificuldades apresentadas pelos professores relacionadas ao conceito de função, com base no estudo realizado por Zuffi (1999), e as possíveis contribuições da Modelagem Matemática na superação dessas dificuldades. Para isso, foi aplicado um questionário investigativo sobre o tema função a um grupo de professores de matemática do ensino básico, num curso de extensão do qual estavam participando. Com base nas respostas dos professores ao questionário, desenvolvemos uma atividade de Modelagem Matemática com o tema “O índice de motorização no Estado do Paraná”. Os resultados desse trabalho indicam que a atividade de Modelagem Matemática possibilita o desencadeamento de diversos aspectos envolvidos no conceito de função, o que permite uma articulação entre o conceito formal, matemático, e as diversas situações pelas quais esse conceito é requerido, bem como as diferentes formas de representação e compreensão desse conceito.

Palavras-Chave: Ensino de Função; Dificuldades; Modelagem Matemática.

INTRODUÇÃO

O conceito de função é considerado um dos mais importantes na Matemática, pois constitui um instrumento indispensável a diversos estudos. Devido ao seu desenvolvimento histórico ter sido longo e delicado, fazemos uso, hoje em dia, de um conceito de função mais sofisticado, com diversos signos que carregam significados complexos que foram desenvolvidos ao longo de milhares de anos.

Dentro do próprio ensino de Matemática, a compreensão do conceito de função apresenta muitas dificuldades, tanto por parte dos alunos como dos professores, pois esse

conceito envolve diversas concepções que necessitam ser compreendidas em vários contextos.

A linguagem matemática foi desenvolvida durante milhares de anos com a colaboração de diversos povos que foram acrescentando a essa linguagem símbolos e significados cada vez mais elaborados. Dessa forma, os conceitos e definições atuais sofreram adaptações para se adequarem a uma linguagem mais técnica e precisa. Então, ao apresentar um conceito matemático “ enxuto”, corre-se o risco de deixar de lado características que seriam importantes.

É exatamente na riqueza de significados que se encontra uma das maiores dificuldades do professor com relação ao ensino de matemática, que é a construção de conceitos dentro da sala de aula. Os alunos têm dificuldades de apropriar-se desses conceitos. O uso da linguagem matemática dentro da sala de aula, ao mesmo tempo em que facilita o diálogo e a escrita, pode prejudicar o aprendizado.

Nesse contexto, cabe ao professor ensinar essa linguagem aos alunos, de forma que eles tenham autonomia para usá-la. Zuffi (1999) traz um estudo sobre a linguagem dos professores nas aulas sobre funções, e aponta algumas das principais dificuldades apresentadas em relação a esse conceito, por parte dos professores do Ensino Médio.

Tendo por base esse estudo de Zuffi, propomos um trabalho no qual buscamos identificar alguns elementos que apontem as dificuldades citadas por Zuffi, em um grupo de professores da rede pública do Estado do Paraná.

Com o objetivo de proporcionar a superação das dificuldades apresentadas pelos professores, desenvolvemos uma atividade de Modelagem Matemática em que os professores tiveram um contado diferenciado com o conceito de função.

Para tais fins, concebemos, neste trabalho, a Modelagem Matemática como “[...] um ambiente de aprendizagem no quais os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade” (BARBOSA, 2001).

MODELAGEM MATEMÁTICA

O ensino de matemática tem sido motivo de preocupação, pois ainda existe uma grande rejeição dos conteúdos matemáticos pelos alunos, e as dificuldades de aprendizado têm se mostrado bastante acentuadas. Muito se tem feito (pesquisas, cursos para

professores, utilização de técnicas e metodologias, etc.) para amenizar esse problema, mas os resultados não se mostram ainda satisfatórios.

Segundo D'Ambrósio (1986), para que o ensino da matemática fique ao alcance da maioria dos estudantes, pode ser direcionado para conteúdos mais acessíveis, diminuindo a formalidade e rigorosidade de sua estrutura. Dessa forma, evita-se que as possibilidades de aplicações sejam levadas a um nível muito elevado. Então, deve-se refletir sobre a metodologia de ensino para que o conhecimento possa ser mais atraente e interessante.

Diversos autores defendem a utilização da modelagem matemática como uma alternativa importante na busca de melhorias para o ensino. Burak (2004) defende a utilização da modelagem matemática como uma alternativa em que o professor exerce o papel de mediador entre o conhecimento e o aluno e o conhecimento já estabelecido. Mas o que é modelagem matemática?

Para Barbosa (2001), dizer que modelagem matemática é a aplicação da matemática em outras áreas do conhecimento é uma visão limitada, e que isso a transformaria num “grande guarda-chuva” que abrigaria quase tudo. Para o autor, não se trata de traçar fronteiras, mas de ter clareza do seu significado. Bassanezi (2004) considera que a modelagem matemática tanto pode ser um método científico de pesquisa como uma estratégia de ensino e aprendizagem, e que tem demonstrado ser uma ferramenta muito eficaz no ensino da matemática. Porém, este autor defende que o conteúdo e a linguagem matemática utilizados devem ser adequados ao tipo de problema e ao objetivo que se pretende alcançar.

Bean (2001) defende que “a essência da modelagem matemática consiste em um processo no qual as características pertinentes de um objeto ou sistemas são extraídas, com a ajuda de hipóteses e aproximações simplificadoras, e representadas em termos matemáticos” (p. 5), e que os aspectos que diferenciam modelagem matemática de outras aplicações são que aquela exige a formulação de hipóteses e aproximações simplificadoras na criação do modelo, já que as demais etapas (o problema, a resolução e a verificação, a validação da solução e a decisão) estão presentes em qualquer tipo de resolução de problema envolvendo matemática. O autor apresenta um exemplo e um contra-exemplo de aplicação de modelagem matemática na sala de aula. No primeiro caso, é mostrada aos alunos uma figura formada por curvas e segmentos de retas, e pede-se que determinem a

área dessa figura. Para tanto, os alunos devem formular hipóteses e fazer aproximações simplificadoras (dividem em áreas de figuras geométricas simples), para obter múltiplas respostas, sem que seja necessário escolher uma melhor resposta. No segundo caso, o autor apresenta um exemplo de problema em que é solicitado que sejam determinadas as dimensões de um jardim retangular (de área dada), sabendo-se que foi utilizada uma determinada quantidade (dada) de arame para cercá-lo. Neste exemplo, embora o aluno traduza as informações dadas da linguagem natural para a linguagem matemática e utilize modelos matemáticos (retângulo de sistemas de equações), não é usada modelagem matemática, pois se exige uma tradução literal do enunciado, e a resposta do problema é única.

Barbosa (2003) concebe atividade de modelagem matemática como um ambiente em que os alunos são convidados a indagar e a investigar, por meio da matemática, situações que tenham referência na realidade. Para o autor, existem diferentes formas de se trabalhar modelagem na sala de aula, dependendo do modo como as tarefas são designadas para os professores e alunos. Barbosa (2003) classifica as experiências matemáticas em três possibilidades, a que chama de “casos”. No caso um, o professor propõe um problema aos alunos, fornecendo os dados qualitativos e quantitativos necessários à sua resolução, cabendo aos alunos buscarem uma solução, que não é única, mas que possa dar uma resposta ao problema proposto. No caso dois, o professor sugere o problema, mas os alunos precisam buscar fora da sala de aula os dados necessários à resolução. No caso três, somente o tema é sugerido e pode ser escolhido pelo professor ou pelos próprios alunos, que precisam buscar informações, formular os problemas e procurar resolvê-los.

Desse modo, o professor tem maior flexibilidade de escolha da forma de trabalhar a modelagem, dependendo de cada momento ou situação. Para a nossa investigação, optamos por trabalhar com o caso um (em que foi proposto um problema e fornecido os dados necessários à resolução) por considerarmos o mais adequado ao propósito do trabalho.

SOBRE O ENSINO DE FUNÇÕES

Escolhemos o ensino médio como campo de estudos para o trabalho sobre funções, baseando-nos na tese de doutorado de Zuffi (1999). Neste trabalho, a autora analisa a fala de professores do ensino médio nas aulas sobre funções e faz o levantamento

de diversos problemas apresentados por professores e alunos no uso da linguagem matemática. Zuffi investiga o que acarreta o uso insatisfatório dessa linguagem, pelos alunos, em situações matemáticas, entendendo por situações problemas contextualizados, propostos aos alunos, para os quais se obtém respostas por meio de procedimentos matemáticos.

Zuffi (1999) apresenta uma análise histórica da construção do conceito geral de função na Matemática, que revela que esta passou por um longo e delicado processo, com a contribuição de muitos matemáticos de renome, bem como as contribuições obtidas do desenvolvimento da teoria dos conjuntos e da construção dos números reais.

Em sua pesquisa, Zuffi primeiramente aplicou um questionário a professores do ensino médio. Depois, observou as aulas sobre funções desses professores, em turmas do 1º ano do ensino médio, na cidade de São Carlos (SP). Essas observações mostraram-se muito ricas, pois revelavam detalhes das expressões do professor dentro da sala de aula, tanto em relação ao conceito de função como aos seus periféricos.

Depois de feitas as observações e analisados os resultados, Zuffi apresenta os principais problemas sobre as concepções do conceito de função observados em sala de aula. Dentre esses, serão enumerados aqui os problemas que se relacionam de maneira direta com os objetivos do nosso trabalho:

D1. “Embora as definições gerais de funções apresentadas... incorporem as idéias formais de ‘conjunto’, ‘relação’, ‘domínio’, ‘contradomínio’ e ‘imagem’, na prática... os modelos que predominam... [são aqueles]... onde as funções são dadas por expressões algébricas simples, em conjuntos numéricos” (ZUFFI, 1999, pg.168);

D2. “... a definição formal, embora bastante ampla, é substituída por termos da prática pedagógica dos professores, como o caso do termo ‘dependência’, usado como sinônimo de relação funcional. Nesta prática, os exemplos que acompanham esse termo não são suficientes para dar conta de toda amplitude do conceito formal e geral de função.” (ZUFFI, 1999, pg. 169);

D3. “O tratamento de fatores como os papéis não-simétricos dos conjuntos de domínio e imagem apresenta-se insuficiente através da expressão dos professores... Além disso, a confusão com o uso das palavras ‘domínio’ e ‘imagem’, ora denotando conjuntos, ora denotando elementos específicos desses conjuntos, acaba por misturar ainda mais esses conceitos...” (ZUFFI, 1999, pg. 169);

D4. “Nas expressões algébricas que denotam as funções, as variáveis ‘x’ e ‘y’, dão a forma gráfica, e as constates aí presentes, fornecem a localização dos pontos da função. Mas essa forma é fornecida *a priori*, pelo professor, e o aluno deve preocupar-se apenas com a localização.” (ZUFFI, 1999, pg. 172);

Essas dificuldades apontadas por Zuffi, indicadas por D1, D2, D3 e D4, foram utilizadas para fazer comparações com dificuldades detectadas nas respostas apresentadas pelos professores no questionário.

Segundo Zuffi, essas características deixam evidente que a linguagem matemática, usada pelos professores, está muito ligada à cultura de ensino pré-estabelecida pela escola, às suas práticas pedagógicas e aos significados dessa linguagem relacionados com a vida diária.

O destaque maior é dado às “regras” e “procedimentos”, carregados pelos livros didáticos e pela comunidade escolar, à formalização dos conceitos, às concepções e aos termos das funções, que são explicitados apenas para cumprir exigências curriculares ou de exames e concursos vestibulares.

DESENVOLVIMENTO

Ao analisarmos as principais dificuldades apresentadas por professores do ensino médio, apontadas por Zuffi (1999), em relação ao ensino e aprendizagem do conteúdo de funções, ocorreu-nos o seguinte questionamento: “A Modelagem Matemática possibilita, ao professor, identificar e/ou superar algumas das dificuldades apontadas por Zuffi (1999) no ensino de função?”.

Para buscarmos uma resposta satisfatória a essa pergunta, elaboramos uma atividade de Modelagem Matemática objetivando proporcionar aos professores um contato diferenciado com os conceitos relacionados ao tema função, favorecendo a identificação e a superação das principais dificuldades observadas.

Essa atividade foi desenvolvida com professores de matemática da rede pública de ensino do Estado do Paraná, como complementação para um curso de extensão que estavam participando.

Os professores, ao receberem o questionário e a atividade, deveriam optar por permitir ou não que suas respostas fossem usadas na pesquisa. Dentre os 33 professores que participaram somente um não permitiu, e mesmo assim participou e desenvolveu toda

a atividade. Assim, o total de professores que optaram por permitir a análise de suas respostas foram 32.

Primeiramente, aplicamos um questionário investigativo sobre o tema função, abrangendo a definição formal, os conjuntos domínio e imagem, as variáveis dependentes e independentes, o gráfico, alguns exemplos de funções etc, visando identificar elementos que sinalizassem a existência de dificuldades em relação ao conceito de função, conforme citadas por Zuffi (1999). Além disso, o questionário buscou algumas informações pessoais sobre os professores, como a sua formação e tempo de trabalho.

Com base nas respostas dos professores ao questionário desenvolvemos uma atividade de Modelagem Matemática com o tema “O índice de motorização no Estado do Paraná”, com o objetivo de favorecer a superação das dificuldades identificadas nos questionários. A atividade foi finalizada com algumas questões em que o professor deveria utilizar novamente os conceitos trabalhados, tanto no questionário como na atividade, a fim de proporcionar um segundo contato com situações em que o conceito de função deveria ser utilizado, mesmo que implicitamente.

O tema da atividade, “O índice de motorização no estado do Paraná”, foi escolhido por ser atual e presente no cotidiano dos professores. Inicialmente, foi apresentado o vídeo¹ de uma reportagem que tratava do aumento do número de carros em Curitiba, que por um lado favorecia o comércio, mas por outro dificultava o trânsito e aumentava a poluição do ar. A reportagem tratava, ainda, dos meios de transporte coletivos que certas empresas oferecem aos seus funcionários, o que diminuiu o fluxo de carros nos horários de maior movimento.

O vídeo promoveu uma discussão sobre o aumento do número de carros em Maringá, que também está se tornando um problema para a população. Durante essa discussão foi explicado que o índice de motorização é o número de veículos para cada 100 habitantes.

Após a discussão, foi fornecida uma tabela que apresentava a evolução do índice de motorização, entre os anos de 1999 e 2010, no Estado do Paraná. Com base nos dados dessa tabela foi proposto o seguinte problema: “Com base nos dados da tabela 01, como podemos exprimir a evolução do índice de motorização, no estado do Paraná, no período de 1999 a 2010?”.

¹ <http://www.youtube.com/watch?v=fK8gjFk1iUk>, acesso em 12 de maio de 2011.

Para o desenvolvimento da atividade, foi solicitado aos professores que representassem os dados da tabela num plano cartesiano que foi fornecido sem definição dos eixos. Com os pontos plotados no gráfico, os professores deveriam determinar uma curva que, em sua opinião, melhor representassem esses dados. A partir daí, os professores deveriam encontrar a função que descreve a curva desenhada, ou seja, um modelo para a evolução do índice de motorização.

Para a validação do modelo encontrado, os professores deveriam preencher uma tabela em que se comparavam os valores fornecidos com os valores obtidos pela aplicação do modelo. Com isso verificaram se o modelo representava satisfatoriamente os dados da tabela inicial.

Para finalizar a atividade, foram propostas quatro questões sobre o problema, buscando identificar o estabelecimento de relações significativas entre o conceito de função e o problema proposto, principalmente quanto às dificuldades identificadas nos questionários.

RESULTADOS

Para a análise do conceito formal de função apresentado pelos professores nos questionários, tomamos por base a definição de função adotada por Zuffi (1999, p. 78): *“Dados dois conjuntos A e B , chamamos função a toda relação de A em B na qual, para todo elemento de A , existe um único elemento correspondente em B ”*. A partir dessa definição, Zuffi destaca duas condições fundamentais: a correspondência deve ser estabelecida para todo elemento do domínio (condição P1); a unicidade da imagem para cada elemento do domínio (condição P2).

Dentre as questões do questionário foi solicitado aos professores que apresentassem uma definição de função, dos 32 participantes, 15 não responderam, 10 apresentaram definições insatisfatórias e somente sete responderam satisfatoriamente².

Por exemplo, nas respostas do questionário 3³ o professor define função como: “... uma relação em que para cada elemento do domínio existe um único elemento correspondente de imagem”. Embora essa definição apresente as condições P1 e P2, não

² Consideramos como satisfatórias as definições que contenham todos os elementos enunciados no conceito adotado por Zuffi e abrangeram as condições P1 e P2.

³ Os questionários foram enumerados de 1 a 32 para facilitar a referência.

determina explicitamente os conjuntos domínio e imagem, caracterizando-se como uma definição incompleta. No questionário 4, a definição é assim apresentada: “seja $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, f será função se, e somente se, para cada domínio de f implicar uma única imagem”. Nesse caso, consideramos a definição como incorreta. Podemos observar uma definição de função correta no questionário 26: “considere A e B dois conjuntos não vazios. A relação $f : A \rightarrow B$ é uma função se para cada $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $f(x) = y$ ”.

Além da definição formal de função, Zuffi faz considerações sobre outras dificuldades, apresentadas anteriormente como D1, D2, D3 e D4. O quadro a seguir apresenta uma classificação das respostas dos professores em relação a essas quatro dificuldades:

Dificuldades	Análise das Respostas dos Professores
D1	- 24 professores citaram expressões algébricas simples como: quadrática, afim, exponencial ou $y = x^2 - 4x + 4$, $f(x) = 2x$. - somente sete professores exibiram exemplos diferenciados, como no questionário 26: “o preço a pagar de gasolina depende do total de litros que é consumido”.
D2	- ao definir função, 15 professores não fizeram uso do termo “dependência”. - 10 professores usaram este termo na definição de função, por exemplo, no questionário 32: “Quando um termo (x) é dependente do outro (y)”; no questionário 7: “quando uma variável depende da outra”; no questionário 10: “duas grandezas com dependência”.
D3	- 10 professores apresentaram uso inadequado dos termos domínio e imagem, principalmente ao responder a questão 4, na qual deveriam responder e justificar se o gráfico discreto apresentado representava uma função. Alguns exemplos podem ser verificados no questionário 11: “Sim, pois cada domínio apresenta uma única imagem”, e no questionário 14: “Sim, pois cada domínio (-2) apresenta uma imagem $(+2)$, cada domínio (-1) apresenta imagem (-2)”.
D4	- o uso de letras convencionais, como x, y, a, b, c, predominou entre os

	professores, e dos 29 que responderam a questão 6, em que as variáveis dependente e independentes não se apresentavam de forma tradicional ⁴ , 11 professores não conseguiram fazer a identificação correta dessas variáveis. Por exemplo, na função $f(a) = ax + b$, alguns professores apontaram como variável independente: b , x , e apontaram como dependente: a , xb , x , a e b .
--	--

Nas respostas apresentadas pelos professores ao desenvolverem a atividade de Modelagem Matemática (proposta após a aplicação do questionário), buscamos identificar indícios de mudanças nos conceitos relacionados ao tema funções, que consideramos com possíveis superações das dificuldades apresentadas no quadro anterior.

Esses indícios foram percebidos nas respostas das questões finais da atividade de Modelagem Matemática, nas quais alguns dos principais conceitos relacionados ao tema função que foram tratados no questionário deveriam ser utilizados pelos professores ao responderem essas questões.

Na primeira questão da atividade, os professores deveriam estimar o número de veículos para cada 100 habitantes nos anos de 2011 a 2015, usando o modelo encontrado. Os 22 professores que determinaram um modelo para a taxa de motorização, conseguiram estimá-la para o período de 2011 a 2015. Não houve dúvida quanto a essa questão.

Na segunda questão foi solicitado que os professores descrevessem algumas características do modelo matemático encontrado e o relacionasse com o problema real. Apesar de terem discutido muito sobre o modelo, apenas 15 professores escreveram algumas relações que observaram, por exemplo: “havendo um maior número de veículos, com certeza aumentará os problemas com o trânsito, meio ambiente e faixa de consumo...”, “a partir de 2015 ultrapassará 2 carros por 100 habitantes, aproximadamente” e “o aumento do número de veículos tem uma tendência a um crescimento exponencial”.

Na terceira questão os professores deveriam identificar as variáveis envolvidas no problema da motorização e apontar quais usaram como variável dependente e variável independente para construir o modelo. Dentre os 22 professores que responderam esta questão, 20 identificaram as variáveis corretamente, não somente pela letra que usaram para representá-la, mas descrevendo com palavras, por exemplo, a variável dependente foi

⁴ Tradicionalmente, a letra x representa a variável independente e a letra y ou a expressão $f(x)$ representam a variável dependente.

descrita como “o número de veículos por habitante” ou “o índice de motorização”, e a variável independente como o “ano” ou “período”.

As desvinculações das variáveis dependentes e independentes das letras comumente usadas pelos professores indicam que a compreensão dessas variáveis, num problema real, facilita sua identificação bem como o seu uso adequado.

A última questão pedia para estimar o número de veículos para cada 100 habitantes na data de 1º de maio de 2005. Para responder essa questão, os professores podiam usar o modelo que encontraram ou os dados do gráfico, sendo que os 19 professores que responderam essa questão resolveram-na corretamente.

Em comparação com as respostas apresentadas anteriormente no questionário, os professores mostraram um melhor desempenho no desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática, pois os conceitos foram utilizados corretamente pelos professores. A atividade promoveu um contato diferenciado com o tema função, por meio de um problema comum do cotidiano dos professores, o que estimulou o desenvolvimento da atividade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As dificuldades no ensino de funções apresentadas por Zuffi (1999), indicadas nesse trabalho como D1, D2, D3 e D4, evidenciam que o conceito de função, mesmo representando um dos conteúdos mais importantes do ensino básico, ainda apresenta muitos obstáculos para o professor na sala de aula.

Esses obstáculos não se evidenciam apenas nos problemas de aprendizagem dos alunos, mas também nas dificuldades dos próprios professores ao lidarem com esses conceitos. Esse fato sinaliza um dos grandes motivos pelos quais os alunos têm dificuldades de aprendizagem, ou seja, a linguagem matemática utilizada na conceitualização e exemplificação feita pelos próprios professores, que não favorecem a construção, por parte dos alunos, de um conceito claro e bem definido.

Ao trabalharmos especificamente com as dificuldades D1, D2, D3 e D4 apresentadas por Zuffi, utilizando uma atividade de Modelagem Matemática, percebemos que esta se mostrou uma ferramenta que favorece a superação dessas dificuldades no ensino de função, pois permite uma articulação entre o conceito formal, matemático, e as

diversas situações pelas quais esse conceito é requerido, bem como as diferentes formas de representação e compreensão desse conceito.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. Caxambu. RJ: ANPED, 2001.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática na sala de aula. Erechim. RS: *Perspectiva*, 2003.

BASSANEZI, Rodney Carlos. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. SP: Contexto, 2004.

BEAN, Dale. O que é modelagem matemática? Recife. PE: SBEM, 2001.

ZUFFI, Edna Maura. O tema “Funções” e a Linguagem Matemática de Professores do Ensino Médio – por uma Aprendizagem de Significados. São Paulo, 1999 (tese de doutorado).