



Encontro Paranaense de Educação Matemática  
Curitiba, 26 a 28 de setembro de 2024.

## GEOMETRIA DOS FRACTAIS EM PESQUISAS BRASILEIRAS: APROXIMAÇÕES COM A SALA DE AULA

Arielle Rodrigues Silveira  
Universidade Estadual de Maringá  
[ariellerodrigues01@gmail.com](mailto:ariellerodrigues01@gmail.com)

Guilherme Oliveira Santos  
Rede Estadual de Educação do Paraná  
[prof.guilherme.o.s@gmail.com](mailto:prof.guilherme.o.s@gmail.com)

Luan Padilha  
Universidade Estadual de Maringá  
[padilha.luan16@gmail.com](mailto:padilha.luan16@gmail.com)

Mariana Moran  
Universidade Estadual de Maringá  
[mbarroso@uem.br](mailto:mbarroso@uem.br)

### Resumo

A Geometria dos Fractais, estuda entidades geométricas com propriedades como a autossimilaridade, a complexidade infinita e a dimensão fracionária, os quais a representação por entes euclidianos se distancia dessas entidades, sendo assim, entendida como uma Geometria Não-Euclidiana. Examinando padrões na aparente irregularidade natural e tendo aplicações em áreas como medicina, tecnologia e astronomia, a Geometria Fractal atrai pesquisadores científicos e educacionais devido à sua capacidade de representar objetos e fenômenos naturais de forma satisfatória. No contexto do ensino, ela permite a exploração de temas em diversas disciplinas como física e biologia, bem como a abordagem de conceitos matemáticos a partir de representações de fractais em desenhos, dobraduras e programações em softwares. Neste sentido, o presente trabalho tem por objetivo identificar aproximações entre pesquisas sobre a Geometria dos Fractais com aplicações em sala de aula. Para isso, realiza-se uma pesquisa do tipo revisão sistemática na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações e no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES. A partir dessa revisão, é possível concluir que existem aproximações como: uso de materiais concretos, uso dos fractais para abordagem de outros conceitos matemáticos, o uso de experiências para verificação e exploração de fractais, bem como a presença ou a preocupação com a aplicação de atividades ligadas ao tema em sala de aula.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Revisão sistemática. Práticas pedagógicas.

### Introdução

A Geometria dos Fractais, concebida como uma Geometria Não-Euclidiana, tem atraído pesquisadores tanto no campo científico quanto no educacional. Isso se deve à potencialidade dessa geometria em analisar objetos da natureza, o que vai ao encontro do que diz Fuzzo *et al.* (2009, p. 11) “[...] a Geometria Euclidiana se propõe a estudar formas regulares que quase sempre são feitas pelo

homem, já a Geometria Fractal estuda padrões regulares e organizados dentro de uma aparente irregularidade, muito encontradas na natureza”.

Além disso, a Geometria dos Fractais possui aplicações em diversas áreas da ciência, tais como medicina, tecnologia, mineralogia, biologia, economia e ecologia (Assis, 2008). Na Educação os fractais podem ser explorados para desenvolver conteúdos variados e, como afirma Rabay (2013, p. 87), mesmo “[...] que abordado em diferentes níveis, o uso da geometria do fractal provoca nos alunos um olhar diferenciado no mundo que nos rodeia”.

Nesse sentido, motivados por estudos desenvolvidos no Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria (GPEG), cujo foco são os aspectos didáticos do ensino de Geometria e que desenvolve pesquisas que abordam a Geometria dos Fractais, neste trabalho temos como objetivo identificar aproximações entre pesquisas sobre a Geometria dos Fractais com aplicações em sala de aula. Desse modo, realizamos uma pesquisa do tipo revisão sistemática em bases de dados de dissertações e teses.

Nas próximas seções, apresentaremos conceitos referentes à Geometria dos Fractais, seguidos dos encaminhamentos metodológicos da pesquisa, a discussão sobre os trabalhos encontrados e nossas considerações.

### **Aspectos da Geometria dos Fractais**

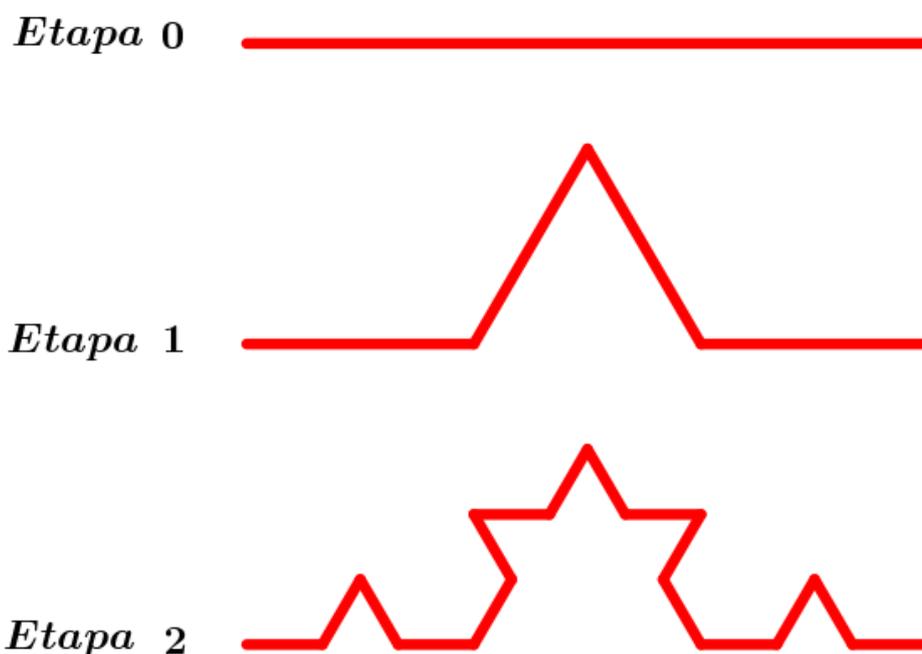
O matemático polonês Benoit Mandelbrot foi um matemático responsável por nomear e organizar boa parte do estudo que se tinha referente aos objetos geométricos chamados fractais. Não há ainda hoje uma definição matemática que abranja todas essas entidades geométricas, porém elas possuem propriedades particulares, entre as quais se destacam a autossimilaridade, a complexidade infinita e a dimensão fracionária (Barbosa, 2005). Mandelbrot denominou esses objetos de fractais baseando-se na palavra *fractus*, um adjetivo do latim derivado do verbo *frangere*, que corresponde a quebrar ou fragmentar.

De acordo com Barbosa (2005), na natureza existem formas irregulares, e tentar representá-las usando formas da Geometria Euclidiana não é a melhor forma, visto que os entes geométricos dessa geometria não descrevem bem essas formas. Nesse sentido, a Geometria dos Fractais pode oferecer aproximações mais adequadas para essas formas.

A Geometria dos Fractais está relacionada a uma ciência chamada *Caos*. As estruturas fragmentadas, belas e complexas fornecem uma ordem ao Caos, buscando padrões dentro de um sistema aparentemente aleatório (Barbosa, 2005). Tanto a Geometria dos Fractais quanto a ciência do Caos desenvolveram-se com o aprimoramento das técnicas computacionais, uma vez que se tratando

de elementos que envolvem iterações infinitas, a computação auxilia na visualização e estudo de iterações superiores às que são reproduzidas no papel.

Um fractal possui suas partes semelhantes ao conjunto como um todo, de forma exata ou aproximada, e isso é chamado de autossimilaridade (Barbosa, 2005). A autossimilaridade exata é possível através de instrumentos de desenho, como o lápis, o compasso, a régua e o esquadro, ou por meio de softwares de geometria dinâmica. A seguir podemos observar o fractal Curva de Koch construído no software GeoGebra (Figura 1).



**Figura 1** - Curva de Koch até a segunda etapa

Fonte: Elaborada pelos autores.

Em relação à noção de autossimilaridade aproximada, em que os padrões não se repetem com exatidão, podemos observar esses aspectos em elementos presentes na natureza, como no brócolis (Figura 2) e na samambaia (Figura 3). O ramo da samambaia é semelhante à folha da samambaia, que, por sua vez, é semelhante à samambaia como um todo, consistindo em uma forma de autossimilaridade aproximada.



**Figura 2** - Brócolis

Fonte: O Blog do Mestre (2022).



**Figura 3** - Samambaia

Fonte: Fractal Matemático (2011).

Outra característica do fractal é a complexidade infinita, expressa através do processo gerador dos fractais, podendo ser recursivo ou iterativo (Barbosa, 2005). Em um fractal, podemos realizar um número infinito de iterações e nunca obteremos a imagem final desse fractal. A Figura 4 a seguir ilustra o fractal Conjunto de Cantor até sua segunda iteração.



**Figura 4** – Conjunto de Cantor até a segunda etapa

Fonte: Elaborada pelos autores.

O fractal será a figura limite do seu processo gerador, e vale ressaltar que esses objetos geométricos não perdem sua definição formal à medida que são ampliados, mantendo a estrutura idêntica à original. Já a dimensão de um fractal não é necessariamente um número inteiro. Ela representa o grau de ocupação do fractal no espaço e está ligada ao grau de irregularidade ou fragmentação (Barbosa, 2005). Portanto, um ente geométrico que possua essas três características pode ser reconhecido como fractal.

### Encaminhamentos metodológicos

Uma revisão sistemática é uma forma de pesquisa que se fundamenta na busca por literatura de determinado tema. Esse tipo de investigação oferece um resumo das evidências vinculadas a uma

estratégia de intervenção particular, utilizando métodos claros e sistemáticos de busca, análise crítica e compilação das informações selecionadas (Sampaio; Mancini, 2007).

De acordo com Sampaio e Mancini (2007), as revisões sistemáticas apresentam relevância para integrar as informações de um conjunto de estudos de forma independente sobre uma intervenção específica. Estes estudos podem produzir resultados divergentes e/ou convergentes, e as revisões sistemáticas têm o objetivo de identificar lacunas nas evidências, orientando pesquisas futuras.

Antes de iniciar uma revisão sistemática é necessário passar por três etapas: estabelecer o objetivo da revisão, identificar a literatura relevante e selecionar os estudos que podem ser incluídos. Além disso, para as autoras uma revisão sistemática requer a colaboração de pelo menos dois pesquisadores, os quais irão avaliar de forma independente a qualidade metodológica de cada trabalho selecionado (Sampaio; Mancini, 2007). Para isso é essencial um protocolo de pesquisa com os seguintes elementos: método para localização dos estudos, critérios de inclusão e exclusão de artigos, definição de desfechos de interesse, avaliação da precisão dos resultados, análise da qualidade dos estudos e análise da estatística empregada.

Para orientar a presente investigação formulamos o seguinte problema de pesquisa: *Que aproximações é possível identificar entre pesquisas sobre a Geometria dos Fractais com aplicações em sala de aula?*. A busca de trabalhos teve como base de dados a Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD) e o Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES. Para a coleta das informações estabelecemos os seguintes critérios:

- **Palavras-chave:** “fractais”, “matemática” e “aplicação”;
- **Idioma:** estudos que estão somente em português;
- **Tipo de documento:** dissertações e teses;
- **Período de publicação:** todo o período disponível na plataforma;
- Foram excluídos trabalhos que não pertenciam à área da Educação Matemática, como Engenharia, Computação, Arquitetura, Economia, Física e Matemática Pura, uma vez que desejávamos identificar aproximações da temática com a sala de aula.

A busca ocorreu no dia 27 de abril de 2024. Na BDTD, foram encontrados 35 estudos, porém alguns trabalhos pertenciam a áreas distintas da Educação Matemática. Desta forma, 15 trabalhos foram selecionados para realizar a leitura dos resumos. No Catálogos de Teses e Dissertações da CAPES, foram identificados 36 estudos. No entanto, assim como na BDTD, emergiram outras áreas de conhecimento, dos quais sete trabalhos foram escolhidos para a leitura dos resumos, seguindo os critérios previamente estabelecidos. Finalizamos então com 22 trabalhos para a leitura dos resumos.

Após a leitura do resumo dos estudos selecionados, foram descartadas pesquisas cujo tema principal não era a Geometria dos Fractais ou cuja plataforma de repositório estava fora do ar. Além disso, estudos que mencionaram *aplicação*, mas não apresentaram o desenvolvimento de atividades foram desconsiderados. Após a filtragem, restaram sete trabalhos. O Quadro 1 apresenta o panorama dos trabalhos, estruturado por título, referência e tipo de documento. Este quadro foi organizado em ordem crescente a partir do ano de defesa do trabalho.

<b>Título</b>	<b>Referência</b>	<b>Tipo de trabalho</b>
Os Fractais na formação docente e sua prática na sala de aula	Almeida, A. A. O. (2006)	Dissertação
Uma seqüência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais	Gonçalves, A. G. N. (2007)	Dissertação
Fractais: generalização de padrões no ensino fundamental	Mineli, J. P. (2012)	Dissertação
Matemática e arte: explorando a geometria dos fractais e as tesselações de Echer	Modesto, C. F. (2015)	Dissertação
Fractais: uma ferramenta no ensino médio	Alves, D. C. S. (2019)	Dissertação
O uso da geometria fractal como ferramenta no ensino de progressões geométricas e logaritmos	Vieira, D. C. (2019)	Dissertação
Uso de vídeos no processo de ensino e aprendizagem de geometria fractal	Alves, R. L. (2023)	Dissertação

**Quadro 1** - Relação de trabalhos selecionados

Fonte: Elaborado pelos autores.

Na próxima seção, dedicamos nossa discussão a respeito das pesquisas elencadas no Quadro 1 com o objetivo de sintetizar as aproximações encontradas e refletir a respeito das perspectivas para futuras investigações sobre o tema. Para tanto, direcionamos nosso olhar para os objetivos de cada trabalho e para as aplicações desenvolvidas.

### **Apresentações das pesquisas sobre Geometria dos Fractais**

Iniciamos com a pesquisa de Almeida (2006, p. v) que teve por objetivo “[...] investigar uma abordagem para o ensino da geometria dos Fractais sob o olhar do professor e sua receptividade no desenvolvimento de uma seqüência didática para abordar o conceito de Fractais”. Nesse sentido, a pesquisa foi realizada com professores da Rede Pública Estadual de São Paulo, no formato de dois encontros.

Antes do primeiro encontro foi realizado um questionário, respondido por 83 professores. Esse questionário buscava caracterizar, identificar os conhecimentos e vivências destes com a Geometria Fractal. A partir dessas respostas, foi elaborada uma sequência com duas atividades a serem desenvolvidas no primeiro encontro: a primeira envolvendo a classificação de objetos e a segunda envolvendo o triângulo de Sierpinski. Essa primeira atividade buscou explorar o conceito de fractal a partir de experiências, assim cada grupo de professor recebeu um *kit* com objetos, os quais deveriam ser classificados por critérios estabelecidos por cada grupo, apresentando aos demais como realizaram essa classificação.

Na segunda atividade, os professores receberam uma folha com instruções, lápis e uma folha para executarem as instruções indicadas. O objetivo da atividade foi o de possibilitar aos professores compreenderem o processo de construção de um fractal, realizando algumas etapas. Além das duas atividades, houve após elas a formalização e exploração do que é um objeto fractal, abordando suas características e elementos, e relacionando com as atividades realizadas.

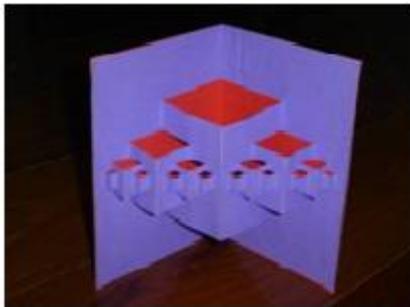
No segundo encontro, houve uma complementação do primeiro encontro, de forma a apresentar e explorar mais atividades que poderiam posteriormente ser aplicadas em sala de aula. A atividade 1 consistia em construir a Ilha de Koch, utilizando sulfite, régua, transferidor, lápis e borracha, com instruções sendo dadas pelos professores ministrantes do encontro. Também nesta atividade foram discutidos conteúdos matemáticos que poderiam ser abordados com esse fractal.

A segunda atividade desse encontro foi a construção de um cartão fractal a partir de um modelo, usando sulfite, tesoura, régua e lápis. Após essa atividade, os ministrantes apresentaram e discutiram um pouco da Teoria do Caos, realizando um jogo em que era possível identificar que mesmo em meio ao caos, havia padrões e regras. Por fim foi realizado um questionário final, para os professores participantes expressarem suas impressões e considerações.

Dessa forma, Almeida (2006) aponta que os encontros proporcionaram possibilidades para a inserção dos fractais em sala de aula, por parte dos professores participantes, utilizando materiais acessíveis e disponíveis nas escolas. Para além, é pontuado que a sua introdução pode apresentar benefícios para o ensino da Geometria, ao ampliar os saberes dos alunos referentes à geometria, para além da Euclidiana.

A pesquisa de Gonçalves (2007, p. 28) teve como objetivo “[...] investigar o aprendizado de Progressões Geométricas via fractais e as suas influências sobre a construção do conhecimento deste assunto”. Para o delineamento da investigação, Gonçalves (2007) embasou-se nos fundamentos metodológicos da Engenharia Didática, com isso, realizou uma sequência de ensino.

Primeiro, Gonçalves (2007) realizou uma análise preliminar a respeito dos temas fractais e progressões geométricas. Em seguida, elaborou a sequência de ensino, a qual foi separada em três blocos: a construção dos fractais; a representação deles empregando a Geometria Dinâmica; e as generalizações. Como recursos foram utilizados cartão dobradura, que serviu para a confecção dos fractais Central (Figura 5) e Árvore (Figura 6), e os softwares *Cabri-Géomètre* e *iGeom*, utilizados para a construção dos fractais Triângulo de Sierpinski (Figura 7) e Tetra Círculo (Figura 8).



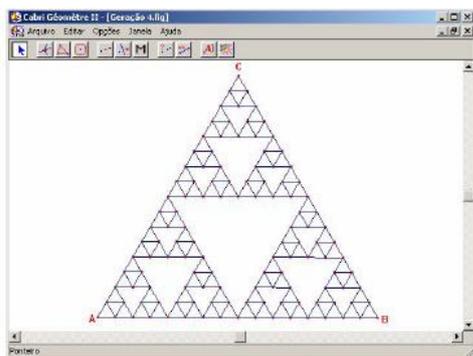
**Figura 5** - Fractal Central feito com cartão dobradura

Fonte: Gonçalves (2007, p. 71)



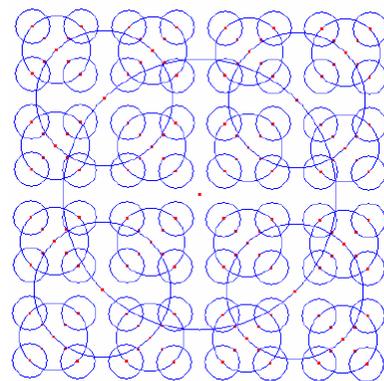
**Figura 6** - Fractal Árvore feito com cartão dobradura

Fonte: Gonçalves (2007, p. 79)



**Figura 7** - Triângulo de Sierpinski no *Cabri-Géomètre*

Fonte: Gonçalves (2007, p. 94)



**Figura 8** - Tetra Círculo no *iGeom*

Fonte: Gonçalves (2007, p. 100)

Para a produção dos dados, a professora pesquisadora propôs a todos os estudantes do Ensino Médio de uma escola da rede particular de ensino no estado de São Paulo um curso de 6 encontros,

com duração de 120 minutos cada. A sequência foi implementada no período diurno e contou com a participação de 44 estudantes. Esse grupo era formado por 26 estudantes da 1ª série, 14 da 2ª série e 4 da 3ª série. Para a realização das atividades, os estudantes foram organizados em duplas. Além disso, a professora pesquisadora teve a colaboração de dois professores observadores, os quais ficaram responsáveis por anotar dúvidas, comentários e conclusões realizadas pelas duplas, sem fazer qualquer intervenção.

O primeiro bloco de atividades teve o objetivo de possibilitar o manuseio do cartão de fractal como forma de apresentar a geometria em um nível mais ‘concreto’. Além de envolver a percepção de relações entre as formas obtidas nas dobraduras como número de elementos por geração, número de elementos novos por geração, volume e área. Com relação ao segundo bloco de atividades, o objetivo foi auxiliar no processo de generalização das fórmulas da Progressão Geométrica. Por último, o terceiro bloco de atividades fez a formalização das ideias desenvolvidas nos blocos anteriores.

Os resultados da pesquisa de Gonçalves (2007) apontam que a construção, a manipulação e a observação dos fractais levam à percepção da autossimilaridade, esta, por sua vez, facilita o processo de generalização dos elementos matemáticos que compõem o estudo de Progressões Geométricas.

Referente à pesquisa de Mineli (2012, p. 7), a qual foi delineada baseada em dois objetivos: “[...] investigar dificuldades relacionadas à formação de habilidades para a Generalização de Padrões e de situações de ensino facilitadoras para essa formação”. Para a coleta de dados foi elaborada uma sequência didática contendo três atividades apoiadas nos elementos da Geometria dos Fractais, tendo em vista a generalização de padrões e sua aplicação baseada na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau.

Essa sequência foi aplicada em sete sessões a uma turma de 7º ano, com 30 alunos, de uma instituição privada na cidade de Ribeirão Preto - SP. A primeira atividade propunha a construir um fractal, o qual poderia ser construído por meio da utilização de lápis, régua, borracha e compasso ou pela utilização do GeoGebra. A segunda atividade, composta por questões, visou identificar conhecimentos dos alunos sobre generalização de padrões e de escrita de equações do 1º grau para um determinado problema.

Por fim, a terceira atividade teve o intuito de utilizar o GeoGebra para a construção do triângulo de Sierpinski, servindo como fonte motivadora ao ensino, juntamente à construção com a utilização dos meios materiais usados nas atividades 1 e 2. As atividades foram desenvolvidas em dois momentos, primeiro individualmente para a construção dos fractais e, depois, em duplas para responder às questões propiciando discussões e levantamento de hipóteses.

Como conclusão Mineli (2012) destaca que: as características das figuras fractais propiciam o reconhecimento de padrões; o reconhecimento de padrões favorece ao aluno realizar generalização; a utilização de figuras geométricas propicia melhor organização dos dados de um problema matemático, o que favorece sua resolução; a generalização de uma dada situação auxilia o desenvolvimento do pensamento algébrico, bem como suas atitudes e autonomia no sentido de observar, conjecturar, tirar conclusões e justificar suas respostas.

O objetivo da pesquisa de Modesto (2015, p. 17) foi “[...] proporcionar aos estudantes maior significado à sua aprendizagem, buscando apresentar aos estudantes aplicabilidade da matemática a outras áreas do conhecimento, com um ensino que tornasse esse momento agradável e interessante”. Assim, num período de quatro aulas, foram desenvolvidas atividades com quatro turmas de dois cursos técnicos (3º e 4º anos de informática e de alimentação) do Instituto Federal do Paraná - Campus de Jacarezinho.

Em um primeiro momento, ocorreu uma aula introdutória sobre a Geometria dos Fractais, na segunda aula o professor da disciplina fez a construção da Árvore Fractal e, nas duas últimas aulas, os alunos realizaram atividades de construção e um questionário. Tais atividades foram distribuídas entre as turmas, de modo que o 3º ano do curso de alimentação ficou com o fractal Tapete de Sierpinski e o 4º ano do mesmo curso com a atividade Árvore de Pitágoras; o 3º ano do curso de informática realizou a atividade referente ao fractal Curva e Floco de Neve de Koch e o 4º ano desse mesmo curso desenvolveu três atividades: Árvore de Pitágoras, Curva e Floco de Neve de Koch e Obras de Escher. As construções foram realizadas com o auxílio dos softwares SketchUp e GeoGebra.

De acordo com o objetivo estabelecido, Modesto (2015, p. 110) conclui que o trabalho “parece ter proporcionado a eles [estudantes], aprendizagem tranquila e agradável. Notou-se a curiosidade dos estudantes durante a introdução do assunto e na execução das atividades”. A autora comenta que os alunos desconheciam os conceitos matemáticos envolvidos nas Obras de Escher e que eles não sabiam que para a criação de tais obras era necessário utilizar de transformações geométricas. Nesse sentido, Modesto (2015, p. 110), afirma que “o trabalho contribuiu para ampliar os conceitos geométricos dos alunos para além dos problemas tradicionais regularmente trabalhados em sala, além de trabalhar conhecimentos de simetria geralmente não abordados no Ensino Médio”.

Com relação à Geometria dos Fractais, Modesto conclui que

As características intrigantes dos fractais fascinaram os estudantes, e aproveitou-se este momento para trabalhar a matemática envolvida em seu processo de construção. Ao observar a participação apresentada pelos estudantes no desenvolvimento das atividades, conclui-se que houve um rendimento considerável para o pouco tempo de trabalho (2015, p. 110).

A pesquisa de Alves (2019, p. 25) que teve como objetivo “explorar a geometria fractal como recurso para o entendimento de conteúdos curriculares de matemática relativos à Progressão Aritmética e Geométrica”. Diante disso, foi realizada uma sequência de três atividades com 38 alunos de uma turma do 2º ano do Ensino Médio técnico de uma instituição pública em Recife - PE, na qual a pesquisadora era a professora titular da disciplina de matemática.

A primeira atividade, introdutória, pretendia identificar os conhecimentos geométricos dos alunos e iniciar as discussões sobre a Geometria dos Fractais. Composta por três questões abertas, onde a primeira solicita ao aluno que desenhe as formas geométricas que conhece e identifique as respectivas nomenclaturas. A segunda questão é composta por uma tabela que relaciona duas colunas, a primeira apresenta os nomes de elementos encontrados na natureza, por exemplo nuvem, montanha e couve-flor, na segunda coluna os alunos devem complementar com o nome da forma geométrica que associam a cada elemento descrito. Por fim, na terceira pergunta, é questionado se os alunos tiveram dificuldades em associar algum elemento da questão anterior, qual o elemento e o por quê?.

A segunda atividade teve como foco a construção de quatro iterações do fractal Triângulo de Sierpinski, cada aluno fez o próprio fractal em uma folha de papel A4 utilizando régua e esquadro. Tal construção foi explorada na terceira atividade, que teve por objetivo investigar os conceitos de área e perímetro, a fim de identificar as noções de progressão geométrica dos alunos. Deste modo, a atividade contém uma tabela que relaciona cada iteração do fractal com os seguintes elementos: nº de triângulos formados; nº de triângulos retirados; perímetro de cada triângulo; perímetro total do triângulo; e área total do triângulo, após a tabela aparecem três questões referentes, respectivamente, ao perímetro, a área e a generalização para a etapa  $n$ .

Com relação à Geometria dos Fractais, Alves (2019, p. 71) conclui que “apesar de estar presente em alguns livros didáticos do ensino médio, a geometria fractal ainda não faz parte das aulas de matemática. Todos os alunos que participaram das atividades desconheciam o termo ‘fractal’. Outra consideração está relacionada com a falta de rigor na escrita matemática dos alunos, que segundo Alves esta

[...] diretamente associado à dificuldade dos alunos para generalização por uma função. Dificuldade não apenas dos alunos, mas dos próprios docentes, que a transfere de forma direta durante as aulas. A defasada formação acadêmica nos cursos de licenciatura associada à prática imediatista (ações pedagógicas direcionadas apenas para aprovações em concursos) e saturada de conteúdo do ensino médio contribui para agravar este problema. Por isso, a necessidade de propostas mais eficientes para que se tenha uma formação de professores com mais qualidade e de capacitações mais objetivas (2019, p. 71).

A pesquisa de Vieira (2019, p. 6) teve como objetivo

“[...] fornecer embasamento teórico e uma sequência didática que abrange diversos níveis de domínio dos conteúdos, para que professores possam trabalhar a geometria fractal como agente motivador no ensino e aprofundamento de conceitos estudados em sala de aula, abrindo também possibilidade para a abordagem de temas como limites e convergência de sequências, ainda que de forma intuitiva”.

A aplicação da sequência didática em sala de aula iniciou com o recorte de cartões fractais, que passa pela relação de fractais com os assuntos estudados no Ensino Médio, até o desenvolvimento de fórmulas gerais, terminando em uma aplicação das propriedades logarítmicas.

Como conclusões da investigação, Vieira (2019) ressalta que o uso de atividades envolvendo a Geometria dos Fractais no ensino de progressões geométricas teve aspectos que despertaram a curiosidade dos alunos. A construção dos cartões fractais foi útil para aumentar a percepção dos alunos para a existência de progressões geométricas e para aprofundar o estudo das progressões ao conjecturar fórmulas para o termo geral delas.

A pesquisa de Alves (2023, p.13-14) tem por objetivo “[...] explorar possibilidades para que a Geometria Fractal possa ser ensinada, por meio de um curso de formação continuada on-line e aberto, e, conseqüentemente, possa ser posteriormente inserida em salas de educação básica”. A aplicação ocorreu no colégio de aplicação da UFJF, em 2021, e contou com a participação de três turmas de 6º ano do ensino fundamental.

Essa proposta foi dividida em 4 etapas: Etapa 1) relacionar figuras de objetos do cotidiano com formas geométricas euclidianas; Etapa 2) analisar as mesmas figuras, buscando elencar características e propriedades, além de classificá-las em formas geométricas conhecidas ou desconhecidas; Etapa 3) após a apresentação de um vídeo, ocorre o debate sobre os tópicos abordados nele, a partir de questionamentos e discussões; Etapa 4) organizar as ideias de forma a destacar os elementos que diferenciam a geometria a qual estão habituados com a nova geometria apresentada.

Na etapa 1 os alunos pontuaram que haviam figuras em que se podia identificar mais de uma forma, bem como havia formatos que lembravam certas formas, mas que não eram exatamente como as conheciam. Na etapa 2, a partir das respostas dos alunos foi possível observar a percepção da natureza irregular dos exemplos de fractais, bem como da autossimilaridade presente neles. Nas etapas 3 e 4, foi possível identificar que os alunos assimilaram a representação com um fractal, também percebendo que é um elemento matemático que se relaciona com outras disciplinas e áreas de conhecimento.

## **Considerações finais**

A partir de uma revisão sistemática, tinha-se por objetivo identificar aproximações entre pesquisas referentes à Geometria dos Fractais e aplicações em sala de aula. Para isso, pesquisamos na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações e no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES. Dentre os trabalhos estudados, foi possível levantar itens de proximidade, como o uso de materiais concretos para abordar fractais.

Seja para iniciar a discussão sobre o que é fractal, para analisar que características estão presentes naquele elemento construído, ou mesmo para representar um fractal após um estudo das suas características, os trabalhos selecionados buscam utilizar esse recurso visual e palpável para possibilitar uma melhor compreensão desses entes geométricos. É a partir ou com essa exploração que são evidenciadas as características de um fractal. Ao ser realizada antes, a construção permite identificar visualmente esses elementos. Ao ser realizada depois, a construção permite verificar a presença dessas características.

Um segundo ponto é a possibilidade de trabalhar outros conceitos matemáticos a partir dos fractais. Por serem aplicações ou possibilidades de aplicações em sala de aula voltadas para a Educação Básica, os trabalhos apresentam o objeto fractal como uma possibilidade para explorar conceitos como progressões geométricas, área, perímetro, figuras geométricas, generalizações, entre outros tópicos.

Um terceiro ponto é que todos os trabalhos envolveram aplicações com alunos, exceto o primeiro exposto no Quadro 1, já que foi desenvolvido com professores e apresentado como possibilidades de introdução do tema na sala de aula. Esse desenvolvimento na sala de aula, evidencia o intuito de inserção da Geometria dos Fractais no contexto da sala de aula, como forma de exploração de conceitos matemáticos, seja da própria geometria ou de outros campos. Por fim, outra característica é que nos relatos há o indicativo de que aqueles objetos os quais estão sendo trabalhados são novos para aqueles que os manipulam.

Portanto, compreendemos que há aproximações entre os trabalhos, apesar de suas especificidades. O intuito de inserir a Geometria dos Fractais no contexto da sala de aula está presente em todos os trabalhos e nos leva a entender que há uma preocupação em experimentar e vivenciar esse processo.

## **Agradecimentos**

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## Referências

- ALMEIDA, A. A. O. **Os Fractais na formação docente e sua prática na sala de aula**. 2006. 221 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.
- ALVES, D. C. S. **Fractais: uma ferramenta no ensino médio**. 2019. 78 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2019.
- ALVES, R. L. **Uso de vídeos no processo de ensino e aprendizagem de geometria fractal**. 2023. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2023.
- ASSIS, T. A. de; MIRANDA, J. G. V.; MOTTA, F. de B.; ANDRADE, R. F. S.; CASTILHO, C. M. C. de. Geometria Fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 30, n. 2, p. 2304.1–2304.10, 2008.
- FRACTAL MATEMÁTICO. **Samambaia**. 2011. Disponível em:  
<http://fractalmatematico.blogspot.com/2011/09/o-que-e-um-fractal.html>. Acesso: 01 jun. 2024.
- FUZZO, R. A.; REZENDE, V.; DOS SANTOS, T. S. Fractais: algumas características e propriedades. In: IV Encontro de Produção Científica e Tecnológica. **Anais**. Campo Mourão: EPCT, 2009.
- GONÇALVES, A. G. N. **Uma seqüência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais**. 2007. 215 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.
- MINELI, J. P. **Fractais: generalização de padrões no ensino fundamental**. 2012. 88 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.
- MODESTO, C. F. **Matemática e arte: explorando a geometria dos fractais e as tesselações de Echer**. 2015. 146 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Jacarezinho, 2015.
- O BLOG DO MESTRE. **Os fractais e o brócolis romanesco**. 2022. Disponível em:  
<https://www.oblogdomestre.com.br/2021/10/Fractais.BrocolisRomanesco.Plantas.Mandelbrot.Matematica.html>. Acesso: 01 jun. 2024.
- RABAY, Y. S. F. **Estudo e aplicações da geometria fractal**. 2013. 89 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2013.
- SAMPAIO, R. F.; MANCINI, M. C. Estudos de revisão sistemática: um guia para síntese criteriosa da evidência científica. **Revista Brasileira de Fisioterapia**, [S.L.], v. 11, n. 1, p. 83-89, fev. 2007.
- VIEIRA, D. C. **O uso da geometria fractal como ferramenta no ensino de progressões geométricas e logaritmos**. 2019. 90 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São



Encontro Paranaense de Educação Matemática  
Curitiba, 26 a 28 de setembro de 2024.

Carlos, São Carlos, 2019.