ANIMAÇÕES NO GEOGEBRA RELACIONADAS A ÁREA DE FIGURAS PLANAS

Adrieli Cristine Bueno
UNESPAR
adrielicbueno@gmail.com

Camila Maria Koftun
UNESPAR
camila.m.k.@hotmail.com

Resumo
No texto *o aluno que encontrou a beleza*, o autor/professor propõe técnicas de soluções para problemas relacionados ao cálculo de área de figuras planas, a partir da decomposição e rotação. Um grupo de alunos do mestrado em Educação Matemática da UNESPAR utilizou este texto na realização de uma tarefa, e criaram animações no GeoGebra para resolver os problemas apresentados no texto e outras questões que também envolvem a área de figuras planas. Nesse sentido, o objetivo deste relato é descrever como ocorreu a construção de animações no GeoGebra para resolver problemas/questões envolvendo área de figuras geométricas. Para isso, foi revisitado o ambiente Moodle UNESPAR para acessar as gravações das aulas e os arquivos postados. Assim, é descrito o processo de construção de algumas animações e enfatizado a ideia principal do texto e das construções: possibilitar que os alunos tenham acesso a uma estratégia diferente para resolver problemas/questões matemáticas, pois geralmente é dado maior atenção às resoluções algébricas, enquanto as resoluções geométricas raramente são discutidas. Para concluir, é destacado que o uso do software GeoGebra e a construção das animações favoreceu e auxiliou a visualização da decomposição de figuras geométricas em problemas/questões matemáticas.

Palavras-chave: Figuras geométricas planas. Decomposição de figuras. Visualização.

Introdução

No estudo da matemática, o cálculo de áreas de figuras planas está vinculado a unidade temática de grandezas e medidas (Brasil, 2018). Entretanto, ao resolver questões matemáticas relacionadas a esse conteúdo, por vezes, outras unidades temáticas podem se fazer necessárias, como a álgebra e geometria. Por exemplo, para calcular a área de um octógono regular, podemos utilizar a fórmula da área dessa figura (resolução algébrica) ou dividir o octógono em outras figuras menores/com menos lados e congruentes, para somar as áreas de cada uma dessas figuras menores e, então, obter a área total do octógono (resolução geométrica).

Dessa forma, ao trabalhar com a área de figuras geométricas, algo que pode contribuir no momento de determinar uma solução para a questão é decompor a figura para analisar as novas figuras que são formadas. Nesse sentido, a decomposição de figuras pode tornar mais visual e acessível a resolução de uma questão geométrica. Conforme Gutiérrez (1996, p. 4, tradução nossa) "a geometria pode ser considerada como a origem da visualização na matemática [...] uma vez que a visualização sempre foi reconhecida como um componente necessário para o ensino e aprendizagem da geometria". Corroborando com essa ideia, podemos observar que geralmente as questões matemáticas relacionadas a geometria apresentam figuras que complementam o enunciado.

Considerando a sala de aula e as tecnologias digitais disponíveis, a construção de figuras geométricas pode ser feita utilizando lápis, papel, régua e compasso ou utilizando um software de Geometria Dinâmica. A principal diferença entre esses dois recursos está na dinamicidade, pois ao usar recursos como lápis e papel as representações ficam estáticas, enquanto ao usar softwares de Geometria Dinâmica as construções podem ser manipuladas (Machado; Bortolossi; Almeida Junior, 2018). Nesse contexto, conforme os autores, a utilização do software é especialmente conveniente.

Ao interagir com o software GeoGebra, por exemplo, o usuário poderá: criar as representações de forma precisa a partir das ferramentas e comandos; realizar transformações com facilidade sem perder particularidades da figura; e animar a construção, proporcionando uma visualização dinâmica para a representação construída. Possibilidades estas que não são possíveis quando se usa recursos estáticos como lápis e papel.

Um tipo de construção que pode ser desenvolvida no GeoGebra são as animações. De acordo com Pereira Junior (2021, p. 15), nesse tipo de construção há "[...] ferramentas do software GeoGebra que possibilitam atribuir dinamicidade a objetos estáticos". Dessa forma, entende-se que, essencialmente, as animações exibem movimento.

Assim, considerando as vantagens da visualização dinâmica para a abordagens de questões matemáticas, este trabalho tem como objetivo descrever como ocorreu a construção de animações no GeoGebra para resolver problemas/questões[1] envolvendo área de figuras geométricas. Nas seções a seguir, explicamos o contexto da situação relatada, bem como os problemas/questões de área para os

[1] No texto *O aluno que encontrou a beleza* (Nery, 2015) o autor usa o termo problemas. Conforme Maia e Proença (2016) é difícil diferenciar um problema de um exercício. Para isso os autores propõem que: um problema constitui-se em um real desafio que os alunos irão buscar uma sequência de ações para obter resultados; e o exercício é referente a repetição de determinada técnica/procedimento que foi exposta pelo professor ou que já é conhecido do aluno. No caso da situação descrita no texto *O aluno que encontrou a beleza*, entendemos que para o aluno as questões propostas pelo professor se constituem como problemas, visto que ele os encarou como um desafio. Dessa forma, ao longo do texto, para referir-se às situações proposta em Nery (2015) usamos o termo *problema(s)*, e quando se tratar de outras situações o termo *questão(ões)* será usado.

quais foram construídas as animações e o passo a passo de cada uma delas. Por fim, elencamos as discussões e considerações do trabalho.

Contexto e pressupostos metodológicos

Durante o ano de 2021, as disciplinas ofertadas pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESPAR ocorreram de forma remota, devido à pandemia da Covid-19. Uma das disciplinas ofertadas no segundo semestre foi a de Tecnologia na Educação Matemática. As aulas dessa disciplina ocorreram de forma síncrona, por meio do Google Meet, uma vez por semana, com duração de 4 horas. Além disso, nessa disciplina em especial, foi utilizado o ambiente Moodle UNESPAR para que as gravações das aulas, tarefas e materiais referentes à disciplina, como vídeos e textos, fossem postadas.

Em determinada aula o professor disponibilizou uma pasta no Moodle com 20 textos. Entre esses textos haviam publicações da Revista do Professor de Matemática (RPM) e da Gazeta de Matemática. Depois ele explicou que, organizados em grupos, os alunos deveriam selecionar um texto, lê-lo e apresentá-lo aos demais. Mas, para além de apresentar o texto escolhido, cada grupo deveria: i) criar soluções e materiais didáticos para trabalhar com o tema do texto considerando a educação básica; ou ii) aprofundar as discussões do texto em termos de pesquisa/estudo. Nos dois casos, os grupos poderiam usar recursos como o GeoGebra ou o Scratch. Em seguida, o professor organizou grupos compostos por três integrantes, por meio de um sorteio. Os grupos tiveram cerca de um mês e meio para preparação e até 45 minutos para apresentar. Cada grupo pôde escolher a dinâmica de apresentação.

Foram necessárias duas aulas para que todos os grupos apresentassem. Todos eles disponibilizaram *links* ou arquivos para que os demais presentes pudessem manipular construções e/ou jogos. Caso oportuno, professor e colegas fizeram questionamentos ou comentários sobre as apresentações, promovendo o diálogo e interação.

Depois da apresentação na aula síncrona, os materiais usados/criados foram postados em um fórum específico no Moodle para que os demais alunos tivessem acesso e pudessem interagir, fazendo comentários e/ou sugestões.

Neste relato, buscamos discutir sobre os materiais produzidos por um dos grupos de alunos, considerando o texto selecionado por eles. Para tanto, revisitamos o ambiente do Moodle UNESPAR para acessar as gravações das aulas e os arquivos postados. A escolha por selecionar esse grupo se dá pelo fato de a primeira autora deste trabalho ter feito parte da equipe e dessa forma, consegue descrever melhor os procedimentos utilizados na produção dos materiais. A segunda autora não fez parte do grupo, mas cursava a disciplina e acompanhou as discussões no dia da apresentação.

Na sequência, relatamos brevemente sobre o texto, seguido do que o grupo apresentou, dando maior atenção aos materiais produzidos.

O texto: O aluno que encontrou a beleza

O grupo escolheu o texto intitulado *O aluno que encontrou a beleza* (Nery, 2015) que aborda uma experiência vivenciada pelo professor e autor ao propor técnicas de soluções de problemas relacionados a área de figuras planas, a partir de divisão dessas figuras geométricas em partes iguais, usando decomposição e rotação. O foco do texto é em um aluno que não era atento nas aulas, mas tirava notas satisfatórias. Esse aluno estava sempre desenhando e quando o professor apresentou tais técnicas, ele começou a se interessar mais pelos problemas.

Um dos problemas propostos e resolvidos pelo professor foi o seguinte: *a) ABCD é um quadrado de área 5 cm² e os pontos M, N, P e Q são pontos médios de seus lados. Calcular a área do quadradinho destacado* (Figura 1).

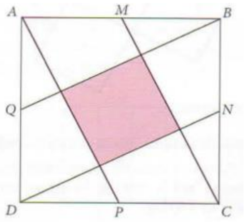

Figura 1 – Figura do problema *a)*

Fonte: Nery (2015, p. 27)

Para resolver esse problema, no texto o professor explica que apresentou uma solução: “[...] deslocando os ‘triangulinhos’ de modo a completar outros quatro quadradinhos congruentes ao quadradinho destacado, e a nova figura, a seguir, equivalente à inicial, sendo composta por 5 quadradinhos, revela que a área pedida é 5 ÷ 5 = 1 cm²” (Nery, 2015, p. 28) (Figura 2). Essa forma de resolver o problema encantou o aluno.

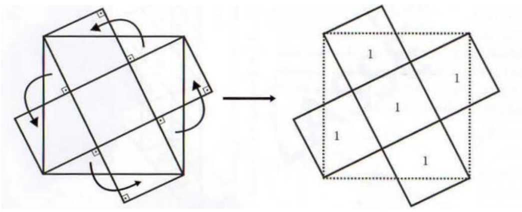

Figura 2 – Resolução geométrica do problema *a)*

Fonte: Nery (2015, p. 28)

O professor propôs problemas para que os alunos fizessem em casa. Na aula seguinte, o aluno apresentou soluções dessa natureza para os problemas. Por exemplo, para resolver o seguinte problema: *b) calcule a área do quadrilátero ACDE, sabendo que a área do hexágono regular ABCDEF é 60 cm²* (Figura 3). O aluno "[...] dividiu o hexágono regular em 6 triângulos congruentes, tendo cada um área [de] 10 cm²", dessa forma, concluiu que "[...] a área pedida é 4 x 10 = 40 cm²" (Nery, 2015, p. 29) (Figura 4).

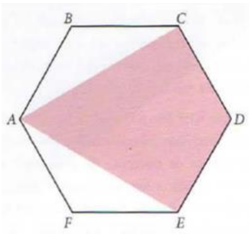

Figura 3 – Figura do problema *b)*

Fonte: Nery (2015, p. 28)

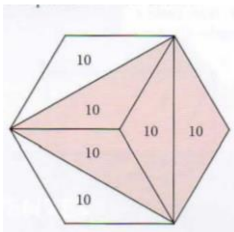

Figura 4 – Resolução geométrica do aluno para o problema *b)*

Fonte: Nery (2015, p. 29)

Depois que o aluno apresentou suas resoluções, o professor o questionou sobre o porquê do seu repentino interesse nesse tipo de resolução para os problemas, e o aluno respondeu: "vi beleza nessas figuras e na estratégia do método" (Nery, 2015, p. 30).

Materiais produzidos pelo grupo para a apresentação

Após ler o texto e selecioná-lo para apresentar, o grupo se reuniu e, em conversas, decidiu pela primeira opção de tarefa apresentada pelo professor da disciplina: i) criar soluções e materiais didáticos para trabalhar com o tema do texto considerando a educação básica. Para isso, optaram por construir animações no GeoGebra referentes a alguns problemas disponíveis no texto, tanto os resolvidos pelo professor como pelo aluno. O objetivo dessas animações foi favorecer a visualização da decomposição de figuras geométricas para determinar suas áreas. A escolha desse software se justifica pela familiaridade dos integrantes do grupo com esse recurso.

Para construir a animação que favorece a visualização da resolução geométrica do item *a)*[2], primeiro foi criado a estrutura da figura geométrica no software, como na Figura 1, da seguinte forma:

- Criar o quadrado ABCD;
- Plotar os pontos médios em cada lado do quadrado ABCD;
- Criar os segmentos que ligam os pontos médios aos respectivos vértices opostos do quadrado ABCD;
- Criar o quadrado destacado.

Depois, para a animação da resolução, precisávamos criar e rotacionar os quatro triângulos retângulos, como na figura 2. Para isso foi necessário:

- Criar quatro triângulos retângulos, usando a ferramenta *Polígono Rígido*;
- Criar um controle deslizante angular α;
- Usar o comando Girar(<Objeto>,<Ângulo>,<Ponto>) e o controle deslizante α para programar que os quatro triângulos retângulos rotacionem (Figura 5);
- Construir quatro quadriláteros que formam os quatro quadrados ao final da animação (Figura 6);
- Programar esses quadriláteros para aparecerem (destacados na cor rosa) apenas no final (quando α = 180º e quando cada quadrilátero for um quadrado);
- Inserir o texto “1” em cada quadrado;
- Criar o botão *Iniciar* (Figura 7).

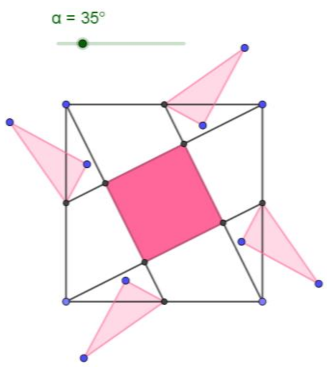

Figura 5

Fonte: os autores

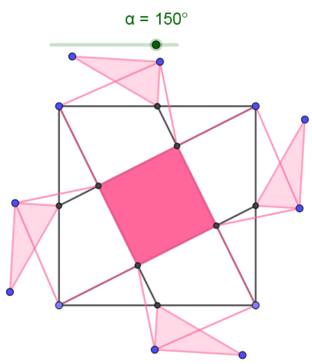

Figura 6

Fonte: os autores

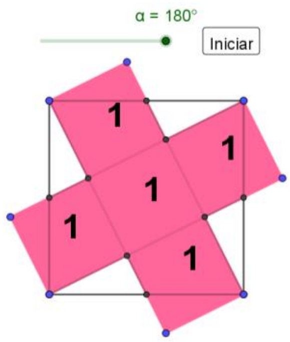

Figura 7 - Animação final da resolução geométrica para o problema *a)*

Fonte: os autores

[2] A animação pode ser acessada em: https://www.geogebra.org/m/q824p5qd

Para criar a animação que favorece a visualização da resolução geométrica do item *b)*[3], novamente foi criado a estrutura da figura no software, como na Figura 3, da seguinte forma:

- Criar o hexágono regular ABCDEF;
- Criar o quadrilátero ACDE dentro no hexágono regular ABCDEF;

Depois, para a animação da resolução, precisávamos decompor a área pintada em triângulos isósceles. Foi idealizado que esses triângulos deveriam rotacionar para que fosse possível apontar que são congruentes, como na figura 4. Para isso foi necessário:

- Criar o ponto J coincidente com o ponto C, o ponto I coincidente com o ponto D e o ponto H coincidente com o ponto E.
- Criar um triângulo isósceles JIH usando a ferramenta *Polígono* (Figura 8);
- Criar um controle deslizante angular α;
- Usar o comando Girar(<Objeto>,<Ângulo>,<Ponto>) e o controle deslizante α para programar que os pontos H e I do triângulo isósceles rotacionem, tendo como eixo de rotação o ponto J, até que o ponto H seja coincidente com o ponto A (Figura 9);

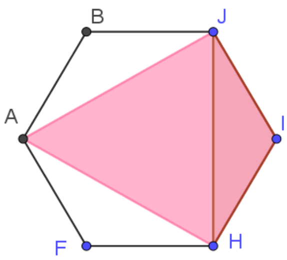

Figura 8
Fonte: os autores

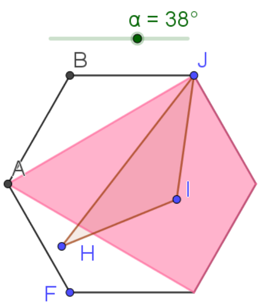

Figura 9
Fonte: os autores

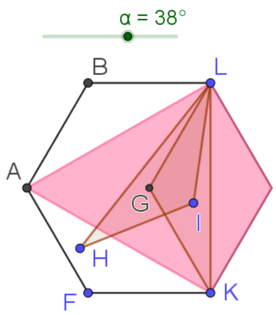

Figura 10
Fonte: os autores

- Plotar o ponto G como centro do hexágono regular ABCDEF;
- Criar o ponto L coincidente com o ponto C e o ponto K coincidente com o ponto E.
- Construir outro triângulo isósceles LKG com a ferramenta *Polígono* (Figura 10);
- Criar um controle deslizante β;
- Usar o comando Girar(<Objeto>,<Ângulo>,<Ponto>) e controle deslizante β para programar que os pontos L e K do triângulo isósceles rotacionem, tendo como eixo de rotação o ponto G, até o ponto L ser coincidente com o ponto A (Figura 11);

[3] A animação pode ser acessada em: https://www.geogebra.org/m/w6nhkt6r

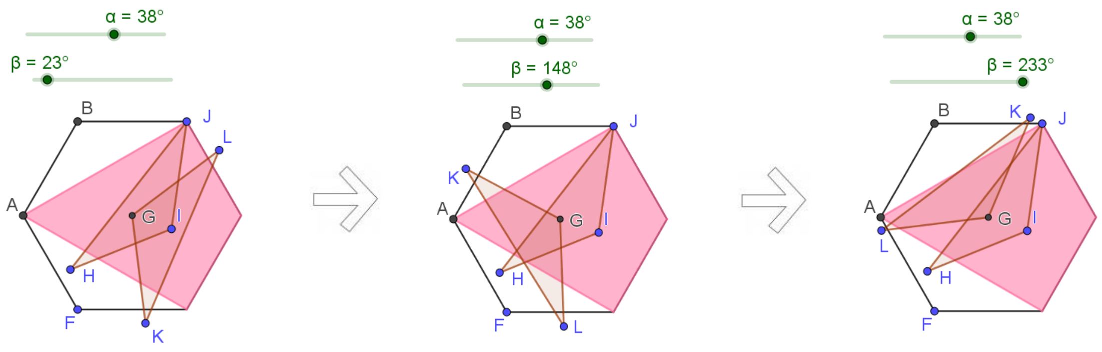

Figura 11

Fonte: os autores

- Programar que esses dois triângulos isósceles, JIH e LKG, sejam animados um na sequência do outro (primeiro controle deslizante α, depois controle deslizante β);

Para favorecer a visualização de que a área colorida pode ser decomposta em 4 triângulos isósceles congruentes, como na Figura 4, foi necessário construí-los. Então a continuação da construção da animação foi pensada da seguinte forma:

- Criar 4 triângulos isósceles dentro da parte colorida, como na Figura 4, mas que ficam ocultos na construção em um primeiro momento;
- Programar que cada um desses 4 triângulos isósceles (dentro da parte pintada) apareçam apenas depois que um dos dois triângulos animados passar por cada um deles (Figura 12);

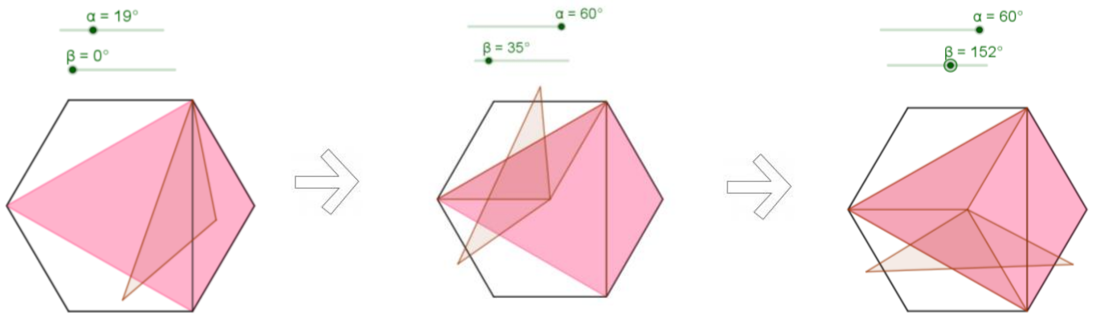

Figura 12

Fonte: os autores

- Inserir o texto “10” em cada triângulos isósceles no hexágono regular ABCDEF, dentro e fora da parte colorida;
- Criar os botões *Iniciar* e *Voltar* (Figura 13).

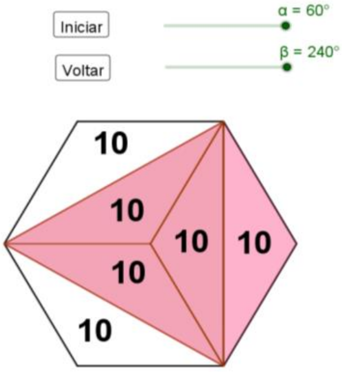

Figura 13 - Animação final da resolução geométrica para o problema *b)*

Fonte: os autores

Os problemas *a)* e *b)* e suas respectivas animações foram exibidas na apresentação do grupo. Ressaltamos que o processo de construção das animações não foi discutido durante a apresentação, apenas os arquivos finais foram exibidos.

Para incrementar a apresentação, além dos problemas propostos no texto, o grupo decidiu buscar e selecionar outras questões relacionadas com o tema do texto. Para isso, buscaram provas como: a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e vestibulares. Uma das questões selecionadas foi da primeira fase (nível 2) da OBMEP de 2017 (Figura 14).

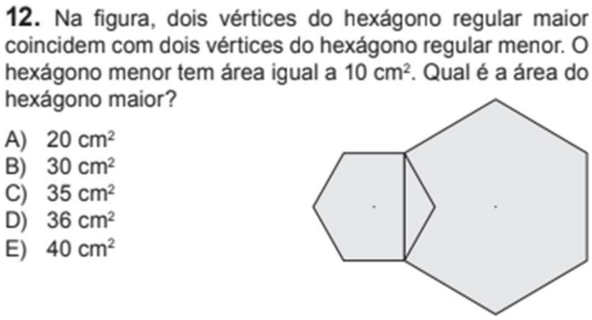

Figura 14 - Questão OBMEP área de figuras

Fonte: OBMEP (2017, p. 3)

Para criar a animação da resolução desta questão[4], foi criada a estrutura das figuras geométricas no software GeoGebra como na Figura 14: o hexágono regular menor, depois o hexágono regular maior e, por fim, o ponto de centro de cada um deles.

[4] A animação pode ser acessada em: https://www.geogebra.org/m/usvnsjrj

Em seguida, para a animação da resolução, precisávamos decompor os dois hexágonos regulares usando figuras congruentes. Então foi considerado, assim como no problema *b)* do texto, que ambos, por serem hexágonos regulares, poderiam ser decompostos em triângulos. Para isso foi necessário:

- Criar um triângulo equilátero no hexágono regular menor com a ferramenta *Polígono Rígido* (Figura 15);

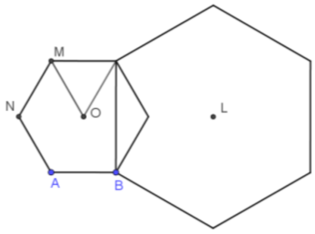

Figura 15

Fonte: os autores

- Criar um controle deslizante α;
- Usar o comando Girar(<Objeto>,<Ângulo>,<Ponto>) e o controle deslizante α para programar que o triângulo equilátero dentro do hexágono regular menor rotacione 360º;

Para favorecer a visualização de que a área do hexágono regular menor pode ser decomposta em 6 triângulos equiláteros congruentes, foi necessário construí-los. Então a construção da animação seguiu da seguinte forma:

- Criar 6 triângulos equiláteros dentro do hexágono regular menor, mas que ficam ocultos na construção em um primeiro momento;
- Programar que cada um desses 6 triângulos equiláteros (dentro do hexágono regular menor) apareçam apenas depois que o triângulo animado passar por cada um deles (Figura 16);

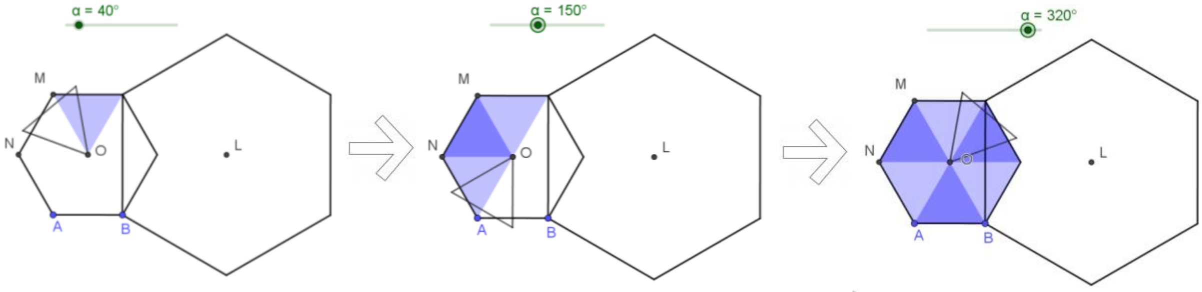

Figura 16

Fonte: os autores

- Por meio de um processo semelhante criar um triângulo equilátero no hexágono regular maior, criar um controle β, criar 6 triângulos equiláteros dentro do hexágono regular maior e programar que apareçam apenas depois que o triângulo equilátero animado passar por cada um deles (Figura 17);

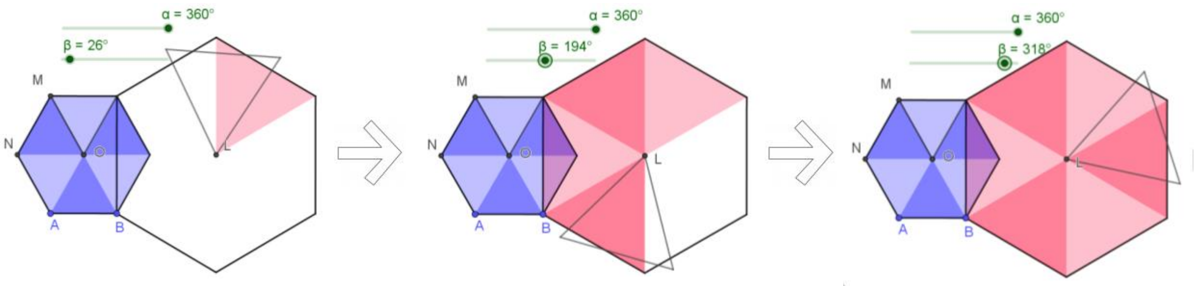

Figura 17

Fonte: os autores

Dessa forma, cada hexágono era composto por 6 triângulos equiláteros. Mas como os triângulos azuis (hexágono regular menor) e os triângulos rosa (hexágono regular maior) são de tamanhos diferentes, foi necessário estabelecer alguma estratégia para comparar a área dos hexágonos por meio de figuras congruentes. Observando a construção da animação até o momento, foi identificado que a interseção entre os dois hexágonos forma um triângulo isósceles, e que esse triângulo é equivalente a qualquer triângulo azul, então foi dado continuidade a animação da seguinte forma:

- Criar um triângulo isósceles na interseção dos dois hexágonos regulares (Figura 18);

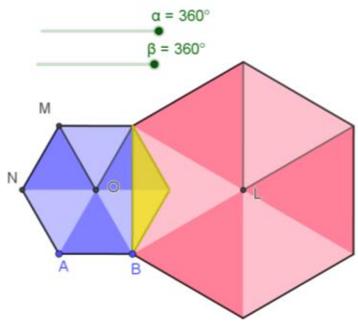

Figura 18

Fonte: os autores

- Criar um controle deslizante γ;
- Usar o comando Girar(<Objeto>,<Ângulo>,<Ponto>) e o controle deslizante γ para programar que o triângulo isósceles de interseção (amarelo) entre os dois hexágonos regulares rotacione 360º, considerando como centro o ponto D (Figura 19);
- Criar e programar que os 3 triângulos isósceles dentro do triângulo rosa com centro em D apareçam apenas depois que o triângulo isósceles animado (amarelo) passar por eles (Figura 20);

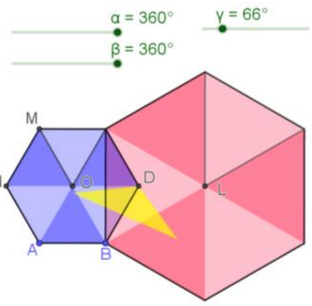

Figura 19

Fonte: os autores

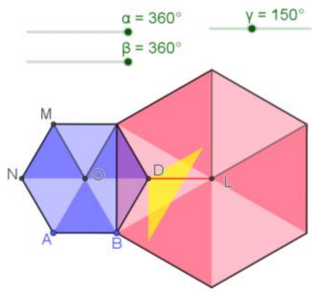

Figura 20

Fonte: os autores

Assim, concluímos que um triângulo rosa pode ser composto em três triângulos amarelos, e que cada triângulo amarelo é equivalente a um triângulo azul. A partir disso, a construção da animação seguiu da seguinte forma:

- Criar um controle deslizante V;
- Criar o ponto de centro de cada triângulo rosa;
- Traçar segmentos ligando os vértices de cada triângulo rosa aos seus respectivos pontos de centro;
- Usar a opção *Condição para exibir objeto(s)* e o controle deslizante V para programar que os segmentos que formam a representação dos três triângulos isósceles em cada triângulo equilátero rosa sejam exibidos conforme a animação do controle deslizante V (Figura 21);

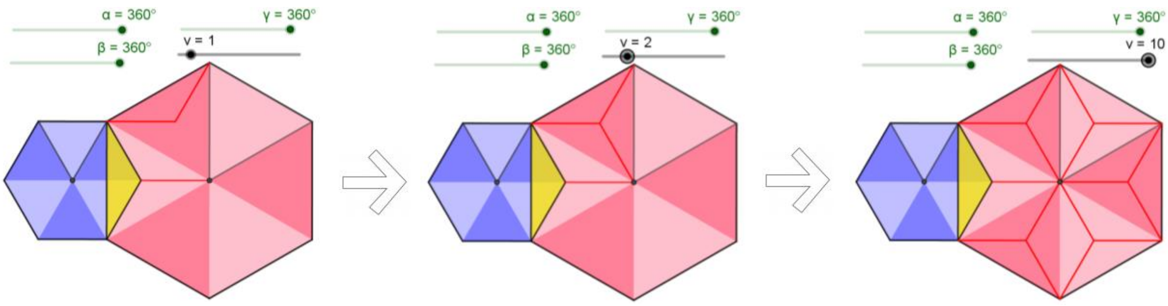

Figura 21

Fonte: os autores

- Inserir os textos: “10cm² ÷ 6” (I) para indicar que o hexágono regular menor, que tem 10cm², foi dividido em 6 partes; “(10cm² ÷ 6)” (II) para indicar a área do triângulo isósceles amarelo; “ · 3 = 5cm²” (III) para indicar a área de cada triângulo equilátero rosa; e “5cm² · 6 = 30cm²” (IV) para indicar a área total do hexágono regular maior;
- Criar os botões *Iniciar* e *Voltar* (Figura 22);

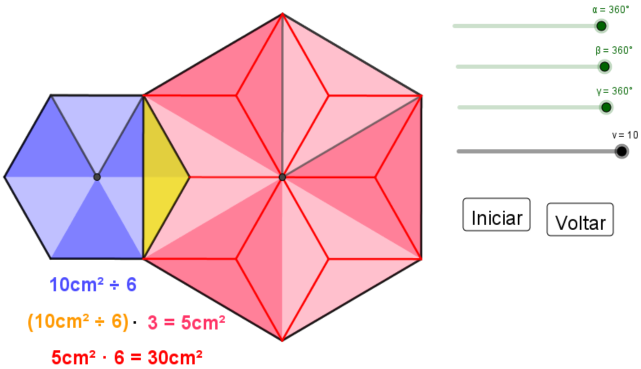

Figura 22 - Animação final da resolução geométrica para a questão da OBMEP (2017)

Fonte: os autores

- Programar a sequência da animação da seguinte forma: iniciando pelo controle α (triângulos azuis), texto I, controle β (triângulos rosa), texto II, controle γ (triângulo amarelo), texto III, controle V (segmentos) e por fim o texto IV.

Outras questões e animações foram apresentadas, mas iremos nos deter à descrição da resolução/animação desta questão.

A dinâmica da apresentação em aula seguiu com a proposta de envolver a participação dos demais alunos e do professor para resolverem as novas questões de área de forma semelhante ao aluno destacado no texto: pela técnica de decomposição de figuras geométricas.

Antes de finalizar a apresentação foram elencadas as conclusões do texto e as principais considerações do grupo, tanto em relação ao texto como também às construções das animações no GeoGebra.

Discussões e considerações finais

As animações construídas no GeoGebra pelo grupo enfatizam a ideia principal do texto: possibilitar que os alunos tenham acesso a diferentes estratégias para resolver problemas/questões matemáticas.

Geralmente problemas/questões matemáticas como os apresentados costumam ser resolvidos apenas de forma algébrica, mesmo que apresentem figuras em seus enunciados, que poderiam ser direcionadas para uma resolução geométrica. Para Koftun (2023) uma justificativa para a tendência em resoluções algébricas nos problemas/questões de matemática se dá pelo fato de que os alunos têm mais contato com esse conteúdo durante o período escolar se comparado com a Geometria, que ainda é negligenciada em detrimento de outros conteúdos.

Mesmo assim, o uso de fórmulas nem sempre faz sentido para o aluno. Reconhecemos que elas são necessárias para determinados momentos, no entanto, nem sempre são compreendidas. Dessa forma, é importante e necessário incentivar e aceitar diferentes formas de resoluções, desde que sejam coerentes e tenham validade matemática. Para isso, os alunos podem recorrer a recursos como lápis, papel e régua, como foi o caso do aluno mencionado no texto de Nery (2015), ou podem usar recursos tecnológicos digitais, como foi o caso das construções realizadas pelo grupo descrito neste relato.

Em relação ao uso do software GeoGebra, destacamos que a construção das animações referentes a resolução geométrica favoreceu e auxiliou a visualização da decomposição das figuras nos problemas/questões matemáticas propostas. Além disso, durante a animação dos objetos, é possível identificar e verificar que as figuras, como os triângulos, são congruentes ou equivalentes, dessa forma a medida pode ser usada para determinar a área de outras figuras nos problemas/questões.

O grupo escolheu esse software pela familiaridade e optou por essa forma de construção, mas dependendo dos conhecimentos do usuário, outras formas e ferramentas podem ser usadas. Também destacamos que foi necessário revisitar os materiais e arquivos disponíveis no Moodle, para que pudéssemos descrever o processo de construção desses arquivos.

Para descrever o processo de criação de cada animação, inicialmente recorremos ao *protocolo de construção*, que é um recurso disponível no software GeoGebra que exibe o passo a passo da construção. No entanto, ao fazer isso foi observado que: o que fica gravado no arquivo da animação é um processo de construção que o próprio software determinou, ou seja, uma sequência de passos que não segue um processo linear de como realmente ocorreu a construção. Todos os elementos necessários para a construção final estão presentes neste protocolo, mas não são exibidos necessariamente na mesma ordem em que foram construídos. Também verificamos que os processos de testes e tentativas não ficam salvos no protocolo de construção.

Nesse sentido, reconhecemos que o software tem vantagens, como facilitar a visualização conjunta de diferentes formas de representação de um mesmo objeto (forma algébrica e geométrica, por exemplo), mas também tem limitações que podem atrapalhar o processo de construção de quem acessa apenas os arquivos finais.

Referências

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. Ministério da Educação, Brasília. 2018.

GUTIÉRREZ, A. **Visualization in 3-dimensional geometry**: In search of a framework. In: Puig, L. e Gutierrez A. (Ed.) Proceedings of the 20th PME International Conference. v.1, p.3-19, 1996. Panama City, Florida.

KOFTUN, C. M.; BASNIAK, M. I. Abordando propriedades conceituais e figurais de objetos geométricos em construções no GeoGebra. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá, Brasil, v. 11, n. 1, p. e23113, 2023. DOI: 10.26571/reamec.v11i1.16862.

MACHADO, E.; BORTOLOSSI, H. J.; ALMEIDA JUNIOR, R. **Explorando Geometria 2D e 3D na Escola Básica com O Software Gratuito GeoGebra para Smartphones e Tablets.** 1 ed. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro. 2019. Disponível em: https://anpmat.org.br/wp-content/uploads/2019/06/geometria-2d-e-3d-corrigido.pdf.

MAIA, É. J.; PROENÇA, M. C. de. A resolução de problemas no ensino da geometria: dificuldades e limites de graduandos de um curso de pedagogia. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 11, n. 2, p. 402-417, 2016. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11n2p402

NERY, Chico. O aluno que encontrou a beleza. **A revista do professor de matemática**. Campinas. n. 87, p.26-30, 1º quadrimestre 2015.

OBMEP. **Provas e Soluções 2017**: 1ª fase nível 2. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas.htm Acesso em: junho, 2024.

PEREIRA JUNIOR, J. C. A. **Ensino de Matemática mediado pelo software GeoGebra**: um enfoque em práticas de professores envolvendo simulações e animações. 2021. 148f. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática) – UNESPAR, União da Vitória, 2021.