

O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Tânia Camila Kochmanscky Goulart
Universidade Estadual de Londrina
maya.tcamila@gmail.com

Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina
lourdes@uel.br

Resumo

Nosso objetivo neste artigo é analisar a resolução de problemas de otimização quando integrada ao uso de *software* de geometria dinâmica. Para isso, fizemos uma investigação em dois problemas desta natureza. Em um deles, olhamos para a resolução apresentada por um professor (em um curso *online* de capacitação para o uso de tecnologias) e no outro, analisamos as soluções encontradas por alunos ao resolverem o problema, em que poderiam optar entre utilizar ou não o *software*. Em nossa análise, verificamos a diversidade de representações associada à validade de uma resolução, pois para Balacheff (1994, 2010) há uma mudança epistemológica associada à resolução vinculada ao uso do *software*.

Palavras-chave: Educação Matemática. Problemas de Otimização. GeoGebra. Domínio de Validade Epistemológica.

Introdução

A utilização de recursos tecnológicos para o aprender matemática tem merecido a atenção de professores nas últimas décadas. O que parece estabelecido no âmbito das discussões é que o computador deve ser visto como uma ferramenta indispensável no cotidiano atual da sala de aula. Nesse contexto, o objetivo deste artigo é analisar, como a resolução de problemas de otimização¹ se dá quando integrada com métodos oferecidos pela tecnologia de um *software* educacional.

Diversas pesquisas na área de Educação Matemática têm discutido a relevância e as contribuições do uso da tecnologia para a aprendizagem em matemática (SANTOS, 2008; BORSSOI, 2013; BORBA et al, 2018). Balacheff (1994) e Balacheff & Kaput (1996), exibem em seus trabalhos uma significativa análise dos programas computacionais e das dificuldades decorrente do seu uso e sua estrutura. Segundo estes autores, a tecnologia, é responsável por dois impactos básicos na aprendizagem: 1) o impacto simbólico, relativo às mudanças nos

¹ Segundo o dicionário Brasileiro do Língua Portuguesa - Michaelis, *otimização*: processo que consiste em determinar as condições em que certas grandezas podem atingir seus valores máximos ou mínimos.

meios de representação da matemática; 2) a interatividade, relativa às mudanças nas relações entre os alunos e entre os alunos e professores, por meio de um novo parceiro.

Neste trabalho dirigimos nossa atenção ao uso do *software* GeoGebra na resolução de problemas de otimização. Para isso, analisamos dois problemas que requerem procedimentos para determinar pontos ótimos da situação em estudo. Em um deles, discutimos a resolução de um problema apresentado por um professor (em um curso *online* de capacitação para o uso de tecnologias) e no outro, analisamos as soluções encontradas por alunos ao resolverem um problema de otimização, em que poderiam optar entre utilizar ou não o *software*. Analisamos a variedade de representações associada à validade de uma resolução, pois para Balacheff (1994, 2010) há uma mudança epistemológica associada à resolução vinculada ao uso do *software*.

Problemas de Otimização em Matemática

Problemas de otimização são, em geral, problemas projetados para modelagem de situações reais, que consistem em maximizar ou minimizar uma função sujeita a um conjunto de restrições e condições previamente estabelecidas. No entanto, quando a manipulação das operações matemáticas requeridas é imposta por meio de representações (gráficos, símbolos, tabelas ou fórmulas) a validade ou não dos procedimentos que consideram estas condições entra em jogo.

Em geral, em nosso dia a dia, sempre que precisamos tomar uma decisão ou queremos otimizar uma situação, estamos nos referindo a problemas de otimização. Tais problemas visam, entre outras coisas, a melhoria de sistemas operacionais e de computadores, além de ter uma aplicação direta no planejamento de destinação de recursos e de produção como, por exemplo, tomada de decisões em indústrias, otimização de rotas ou custos de transportes.

Ao abordar especificamente o tema otimização de funções aliada à tecnologia, acreditamos que o uso de ferramentas na resolução e análise de resultados nos estimula a pensar sobremaneira em diferentes aspectos da aprendizagem, incluindo as formas de trabalho para melhor aproveitá-lo. A ferramenta computacional a que nos referimos neste artigo é o *software* GeoGebra.

O Software GeoGebra

A utilização dos *softwares* de geometria dinâmica, em particular o GeoGebra, contribui de maneira significativa para a manipulação de representações gráficas (BORBA, 2018; TALL, 1992). O GeoGebra é um *software* de livre acesso, de fácil instalação e que pode ser usado até mesmo *online*, direto na sua plataforma.

Criado em 2001, atualmente é usado em mais de 190 países e traduzido em 55 idiomas. Seu objetivo é facilitar a investigação de diversos conceitos matemáticos. Por apresentar em sua *interface* (local de comunicação entre o usuário humano e o dispositivo), janelas simultâneas de Álgebra e Geometria, o *software* contribuiu para as diferentes representações de forma dinâmica. Algumas versões permitem a exploração, construção e visualização de objetos tridimensionais (3D), permitindo que o usuário, dentre outras coisas, relacione tais representações com maior facilidade ou visualize um mesmo objeto matemático de maneiras diferentes.

Além disso, o *software* possui uma *interface* ‘amigável’ que facilita a sua utilização, possibilitando o emprego de diferentes estratégias para a resolução dos problemas. A manipulação de diferentes representações dos objetos matemáticos que são produzidas também com o uso do *software*, requer, entretanto, a possibilidade de validar as respostas, requer o usuário estabelecer relações entre o conhecimento e o uso da ferramenta computacional, o que nos remete à ideia de validade epistemológica.

Domínio de validade epistemológica

O computador, além de oferecer um ambiente de aprendizagem, promove a criação de diferentes possibilidades na organização de conceitos matemáticos. Portanto, acreditamos que não é suficiente que se tenha à disposição elementos tecnológicos; é necessário também que se saiba validar a solução obtida na interface do *software*.

Para Balacheff (1994), o problema levantado pela ‘transposição’ para o computador (chamada por ele de transposição informática) é o do *domínio da validade epistemológica* de dispositivos computacionais para aprendizagem humana. A validade epistemológica se refere ao conhecimento em si e à relação com o conhecimento proporcionada pelas ferramentas do *software*.

Sob o ponto de vista de Balacheff (1994, 1996) o *domínio de validade epistemológica* em um ambiente computacional pode ser reconhecido por pelo menos uns dos seguintes atributos: a) as características funcionais e o conjunto de problemas que o *software* pode fornecer; b) a condição das ferramentas e objetos que promovem a sua estrutura formal; c) a essência da fenomenologia (que relaciona objetos e ações sobre os objetos subjacentes aos fenômenos) que é exibida na *interface* diretamente acessada pelo usuário; d) a coerência e a consistência do dispositivo, essenciais para determinar o *feedback* para o usuário. Essas características são citadas pelo autor como as que, provavelmente, poderão determinar a natureza dos significados construídos pelo aluno. Assim,

A interação entre um aprendiz e um computador é baseada em uma interpretação e computação simbólica da entrada do aluno, e o feedback do ambiente é fornecido no próprio registro, permitindo sua leitura como um fenômeno matemático. (BALACHEFF & KAPUT, 1996, p. 469, tradução nossa)

Ainda nas palavras de Balacheff (1996) há também o domínio de validade do próprio *software* educacional em uso. Neste contexto, o autor pondera que

Esses problemas e fenômenos são intrínsecos à informatização da matemática e dos ambientes de aprendizagem. Adaptar e representar o conhecimento dentro do meio computacional tem efeitos inevitáveis, que constituem tanto restrições quanto oportunidades. Lidar com essas restrições e oportunidades envolve questões de design além da educação - em engenharia de conhecimento, computação gráfica, interação pessoa/ máquina, por exemplo. (BALACHEFF & KAPUT, 1996, p.481, tradução nossa)

Segundo o autor, no contexto da aprendizagem, a inserção de materiais manipuláveis apresenta um caráter intrinsecamente cognitivo, mas no caso do *software*, a *interface* não está sob o controle do usuário. “Interfaces diretamente manipuladas levam a um novo problema, o da relação entre o comportamento das representações e o comportamento de modelos que os sustentam” (Balacheff, 1994b, p.367, tradução nossa).

Esses aspectos têm influência direta sobre a informatização de ambientes matemáticos e de aprendizagem. Representar e conciliar o conhecimento dentro do meio computacional tem efeitos inevitáveis, que podem constituir tanto restrições quanto oportunidades. Nesse sentido, não é suficiente usufruir de elementos tecnológicos, é indispensável que se saiba validar/ mediar por meio da interface do *software*, a solução obtida.

Neste artigo dirigimos nossa atenção para a resolução de problemas de otimização quando ela se dá integrada com métodos oferecidos pela tecnologia de um *software* educacional, olhando para a constituição do domínio de validade epistemológica neste contexto.

As atividades com o uso do software GeoGebra

Levando em consideração a base teórica a que nos referimos, apresentamos a resolução de problemas de otimização com o dispositivo informático de acordo com a perspectiva Balacheff (1994). Inicialmente usamos um problema proposto em Hoyos (2017), em que é apresentada a resolução de um professor (P1) que usa o GeoGebra para a resolução do seguinte problema:

Uma refinaria pode produzir 12 000 barris de petróleo por dia e pode produzir gasolina Premium [alta octanagem] e Magna [sem chumbo]. Para atender a demanda, a refinaria deve produzir pelo menos 2 200 barris de Premium e 1 500 da Magna. O centro de distribuição da gasolina Premium fica a 30 km da refinaria e o centro de distribuição da Magna fica a 10 km. A capacidade de transporte da refinaria é 180 000 barris / km por dia (Isto significa que 180 000 barris são transportados 1 quilômetro por dia - bpd). Se o benefício for de 20 pesos por barril de Premium e 10 pesos por barril de Magna, quantos barris de gasolina devem ser produzidos diariamente para maximizar o benefício? (HOYOS, 2017; p. 2/8)

A resolução do professor (P1), baseia-se na formulação de desigualdades para modelar a situação real, além de fazer representações no *GeoGebra*, para representar estas desigualdades. Esta atividade tem como objetivo, traduzir, a partir de suas condições iniciais, a representação dos dados no *software*, identificando a região de viabilidade na qual o benefício máximo deveria ser deduzido.

Apresentamos parte da solução do professor (P1) exibida no artigo, que identificou as seguintes variáveis: o número de barris *Premium* (y) e o número de barris *Magna* (x), conforme indica a figura 1.

Figura 1 – Desigualdades apresentada pelo professor (P1) para representar o problema

$$\begin{array}{l} x + y \leq 12\,000 \\ 10x + 30y \leq 180\,000 \\ x \geq 1\,500 \quad y \geq 2\,200 \end{array}$$

Fonte: HOYOS, 2017.

A partir daí o professor (P1) exibiu a função encontrada por ele, que representa o benefício máximo, conforme mostra a figura 2.

Figura 2 – Função benefício máxima obtida pelo professor (P1)

$$f(x) = 20x + 10y$$

Fonte: HOYOS, 2017.

Além disso, o professor (P1) acrescentou que, para obter o benefício máximo, precisou considerar as equações, exibidas na figura 3.

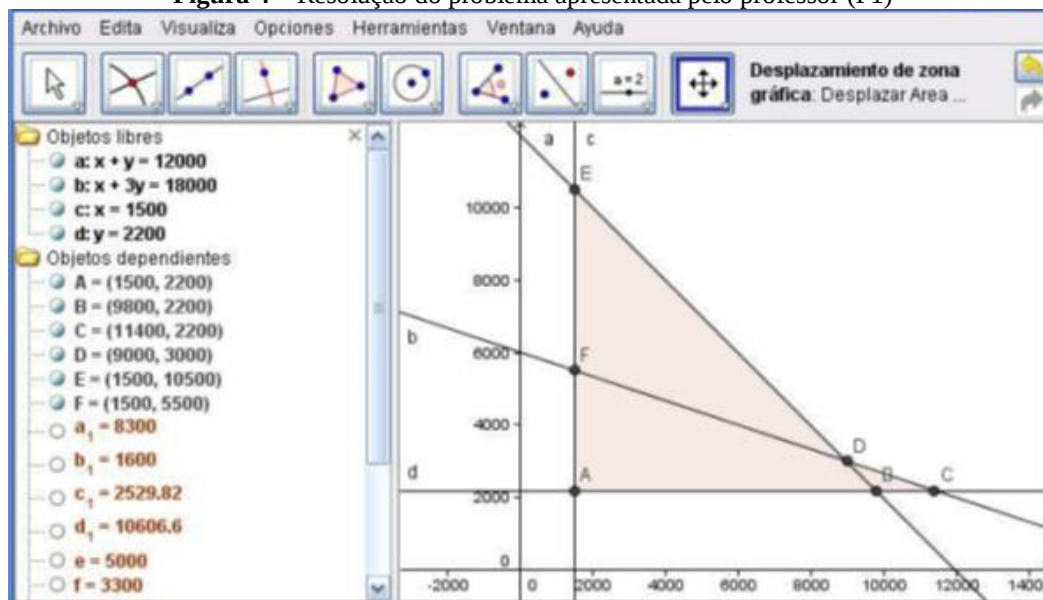
Figura 3 – Funções usadas pelo professor P1 no GeoGebra para obter o benefício máximo

$$\begin{aligned} x + y &= 12\,000 \\ 10x + 30y &= 180\,000 \\ x &= 1\,500, y = 2\,200 \end{aligned}$$

Fonte: HOYOS, 2017.

Em sua solução final, de acordo com as identificações feitas com o GeoGebra (figura 4), o professor (P1) justifica que, para encontrar os valores que maximizam a função $f(x)$, limitou a região com os pontos que atendem as condições iniciais do gráfico e complementa que os pontos C e D não são viáveis, concluindo que a solução obtida é $x = 2\,200$ (número de barris de gasolina Magna) e $y = 9\,800$ (número de barris de gasolina Premiun) com um benefício máximo de $f(x) = 218\,000$ bpd.

Figura 4 – Resolução do problema apresentada pelo professor (P1)



Fonte: HOYOS, 2017.

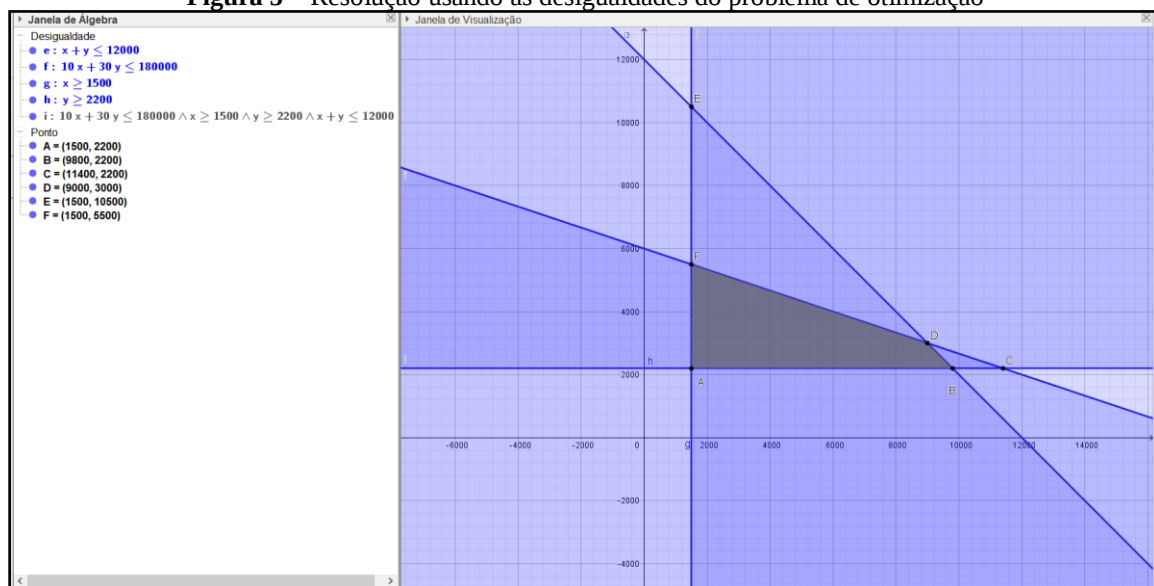
No artigo, a autora faz uma análise da resolução encontrada pelo professor (P1) e identifica um erro de notação (figura 2) pois o professor (P1) deveria denotar a função de duas variáveis como função $f(x, y) = 20y + 10x$, além de ocorrer uma troca em relação às variáveis x e y . Observamos que o professor não explorou a região de viabilidade, identificada pelos triângulos AEB e BDC como mostra a figura 4. Acreditamos que este desacerto se deu pelo fato do professor usar apenas as equações e não as desigualdades, e desta forma, a região de viabilidade não ficou evidente (veja figura 4). Além disso, o professor se atentou que a

capacidade máxima da refinaria é de 180 000 bpd, apresentando um benefício máximo de 218 000 bpd. Ou seja, as condições do problema não foram usadas na resolução.

As discussões do problema apresentado pelo professor (P1) em relação ao uso do *software*, refletem as assertivas de Balacheff & Kaput (1996) ao enunciar que as possibilidades fornecidas pelo *software* satisfazem critérios epistemológicos associados à qualidade do *feedback* visual que eles fornecem. E ainda afirma que “a forma como o aprendiz dá sentido ao *feedback* e deriva disso uma compreensão de sua própria atividade molda o significado que ele constrói da matemática envolvida” (Balacheff & Kaput 1996, p. 473, tradução nossa). De fato, a resolução do professor confirma uma clara dificuldade em resolver problemas de otimização e refletir sobre uma função de mais de uma variável e seu gráfico. As representações fornecidas pelo *software* refletem o pensamento do usuário, mas que neste caso estão equivocadas.

Entretanto, isto não significa que o *software* não é adequado para a abordagem do problema de otimização. Requer, no entanto, o uso de inequações no *software*, e não equações. Apresentamos essa resolução, conforme indica a figura 5.

Figura 5 – Resolução usando as desigualdades do problema de otimização

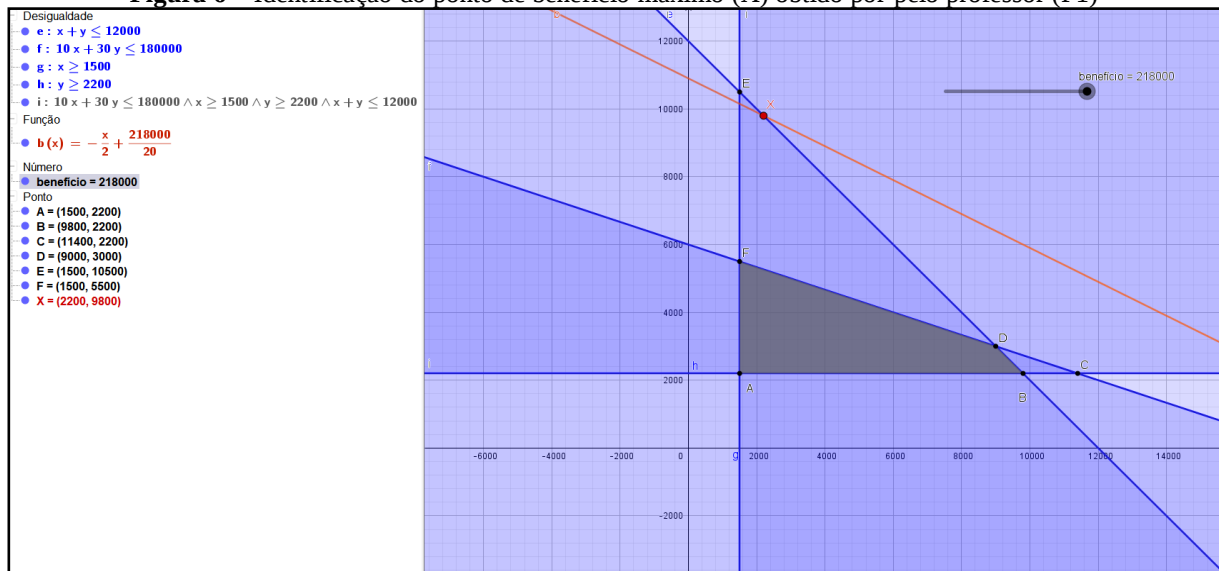


Fonte: Das autoras.

O que se precisa fazer neste caso é escrever as desigualdades no *software* e então a região de viabilidade fica, evidente conforme mostra a figura 5. Usando o comando para identificar a intersecção entre as desigualdades, a região de viabilidade fica definida. O equívoco na resolução do professor (P1) consiste justamente no uso de coordenadas de pontos que não estão na região de viabilidade, como por exemplo, os pontos C e E exibidos na figura 4.

Uma vez identificada a região de viabilidade, podemos explorar a função benefício (máximo), arrastando o ponto sob a região e verificando o aumento ou diminuição da função, conforme os pontos estejam variando (veja figura 7). No caso da resolução do professor (P1), ele teria identificado facilmente que o ponto, determinado por ele como solução, (identificado na figura 6 como X) não pertence à região de viabilidade:

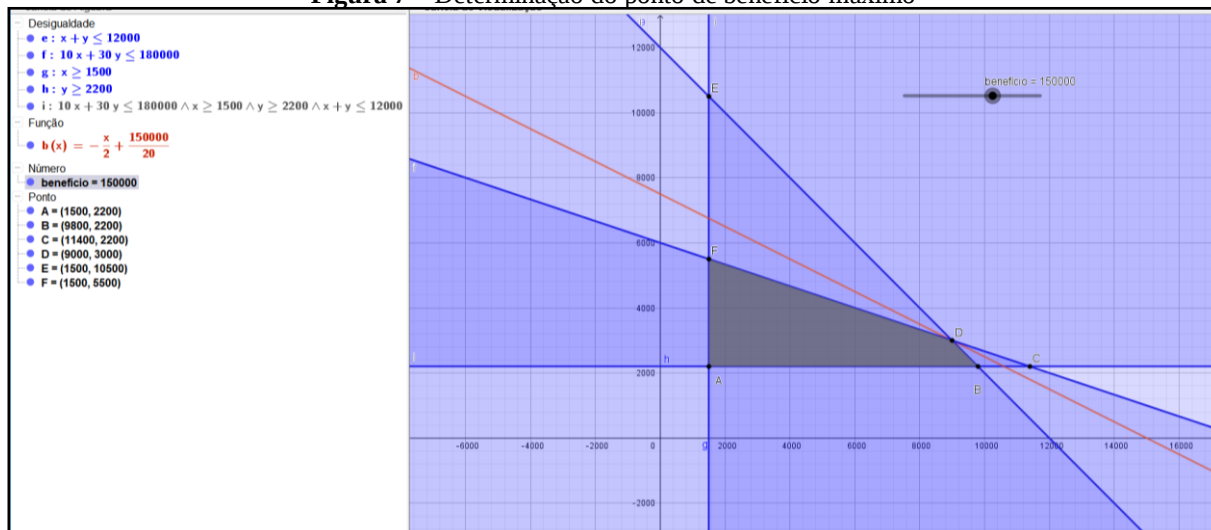
Figura 6 – Identificação do ponto de benefício máximo (X) obtido por pelo professor (P1)



Fonte: Das autoras.

Assim, a resposta encontrada para o problema de otimização, variando a função benefício máximo é o ponto D (conforme mostra a figura 7). Concluimos então, que a solução é $x = 3000$ (número de barris de gasolina Magna) e $y = 9000$ (número de barris de gasolina Premiun) com um benefício máximo de $f(x) = 150\,000$ bpd.

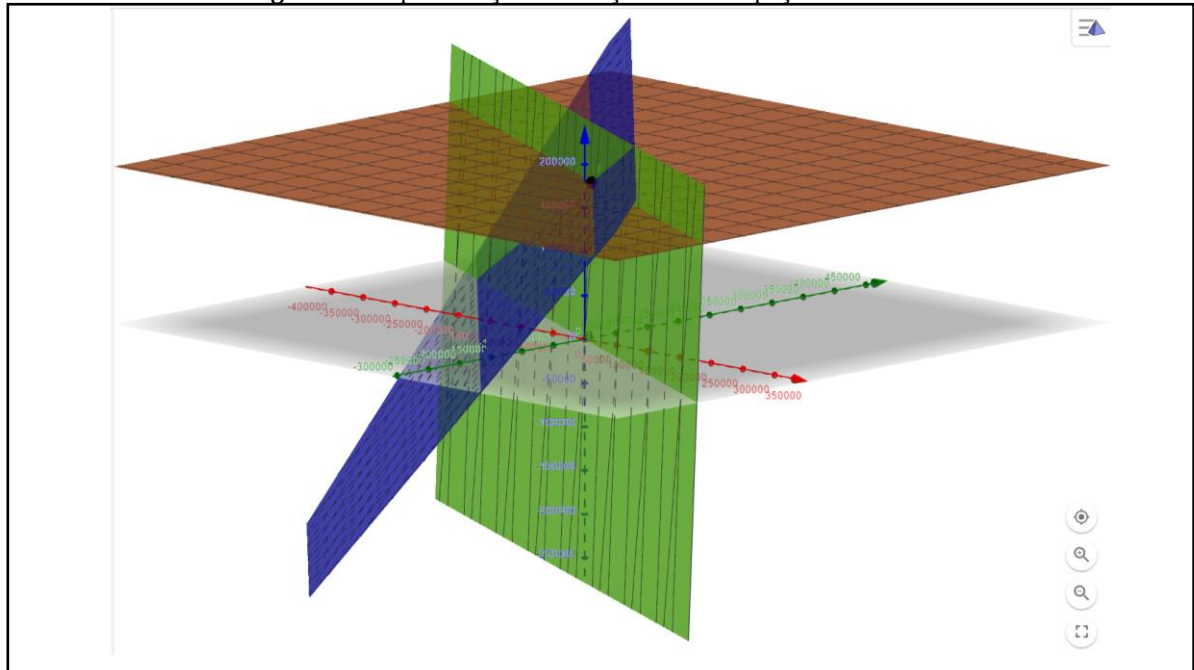
Figura 7 – Determinação do ponto de benefício máximo



Fonte: Das autoras.

Uma outra possibilidade para a resolução deste problema de otimização com o GeoGebra consiste em usar a janela 3D do *software*. Assim, com o recurso de rotacionar a construção realizada na janela 3D, podemos obter visualizações sob todos pontos de vista do objeto, conforme mostra a figura 8.

Figura 8 – Representação da solução em um espaço tridimensional.



Fonte: Das autoras.

Um outro problema de otimização a que nos referimos foi resolvido por alunos em uma disciplina em programa de pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. O problema consta em Grande & Vazquez (2014) e tem o seguinte enunciado:

Numa estrada, com 9 km de comprimento será construída uma estação de tratamento de água (ETA), localizada no ponto P, para abastecer duas cidades A e E, localizadas ao norte dos pontos C e G cujas distâncias são 8 km e 4 km respectivamente da estrada, conforme indica a figura 9.

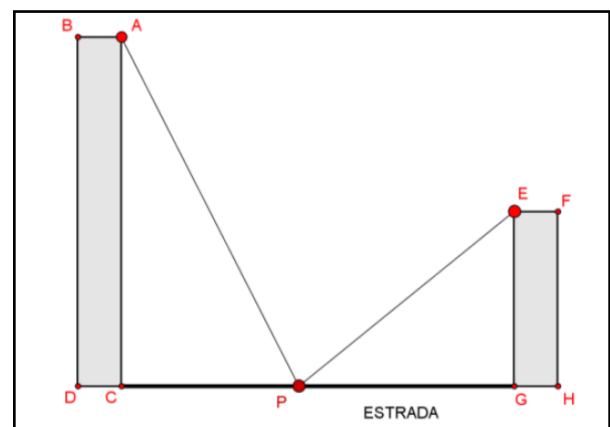


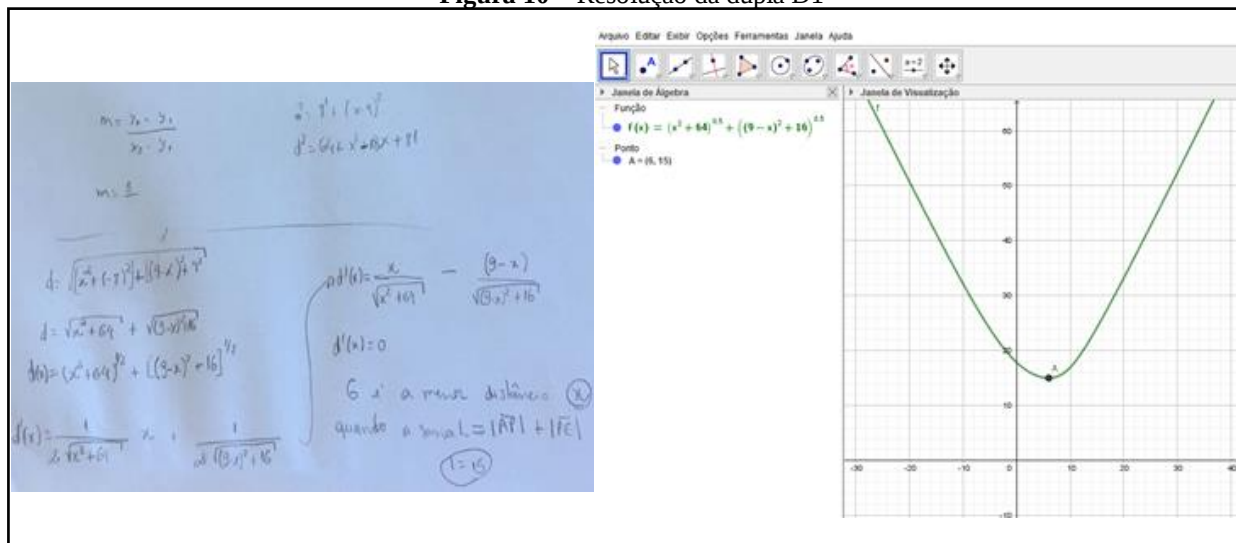
Figura 9 – Distâncias das cidades à estação de tratamento de água
(**Fonte:** GRANDE & VAZQUEZ, 2014, p. 29)

Determine a que distância x do ponto C deve ser instalada a estação de tratamento de modo que a soma das distâncias da estação às cidades seja mínima.

Para a resolução do problema, os alunos, dispostos em duplas, poderiam optar entre utilizar ou não o *software*. As duplas de alunos usaram diferentes procedimentos para a resolução do problema e o *software* também desempenhou diferentes funções nestas resoluções.

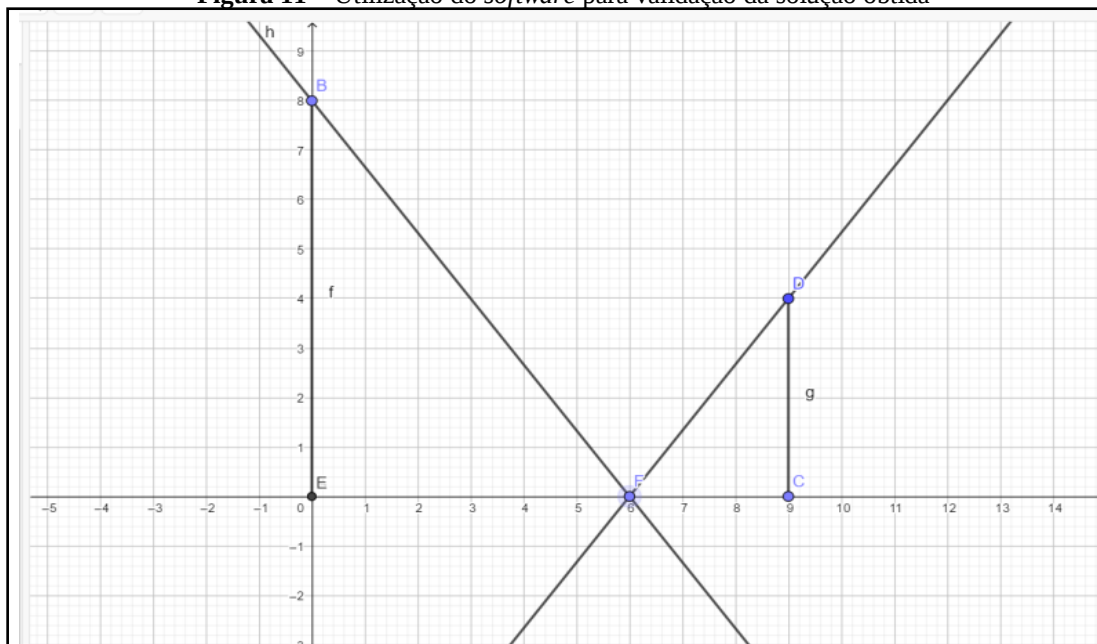
Uma dupla de alunos (D1) utilizou o *software* para encontrar a solução do problema a partir da função e sua derivada determinada usando lápis e papel, conforme indica a figura 10. De fato, os alunos determinaram a derivada, mas o ponto de otimização da distância só foi determinado usando o *software*.

Figura 10 – Resolução da dupla D1



Fonte: Dupla D2.

Analisando a resolução de outra dupla (D2), identificamos que ela apresentou todos os cálculos algebricamente, fazendo o uso de lápis e papel. Após encontrar a solução, a dupla utilizou o *software* e fez um esboço da situação, manipulando o ponto de intersecção entre as retas, identificando que a instalação deveria ser feita a 6 km da estação de tratamento de água, conforme mostra a figura 11.

Figura 11 – Utilização do *software* para validação da solução obtida

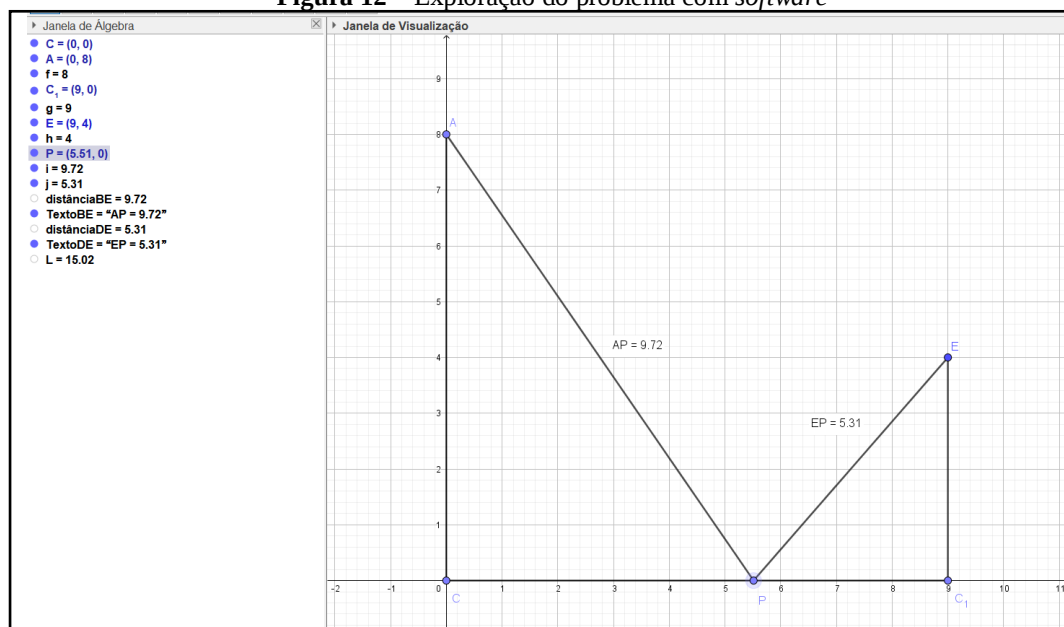
Fonte: Dupla D2.

Ambas as duplas encontraram a solução correta. Entretanto, fazendo uma comparação entre as resoluções analisadas, observamos que ambas recorreram ao *software* em algum momento, porém cada com a sua representação (gráfica e geométrica).

Nesse sentido, concluímos que as duplas, ao recorrerem ao uso da tecnologia, se apropriaram das possibilidades fornecidas pelo *software*, pois demonstraram uma construção do conceito do conteúdo matemático a partir de sua mediação e validação da solução obtida.

Entretanto, podemos ponderar que a dupla (D2) poderia realizar uma exploração mais eficiente, aproveitando-se de outros recursos disponíveis pelo *software*, optando por variar o ponto P sob o eixo dos x , quando este estivesse associado à função de otimização, e assim, poderiam verificar que a proximidade ou o afastamento do ponto, aumentaria a soma das distâncias entre as cidades A e E , conforme mostra a figura 12.

Figura 12 – Exploração do problema com *software*



Fonte: Das autoras.

Considerações Finais

A tecnologia utilizada na resolução de problemas, em particular, em problemas de otimização, contribui para validade epistemológica de diferentes representações para os objetos matemáticos e para a construção de respostas para problemas obtidas de diferentes maneiras. De fato, o *software* oferece diferentes possibilidades e a criação de um novo ambiente para a produção de respostas para os problemas.

Sob a ótica de Balacheff, “ideias matemáticas são sobre ideias matemáticas; elas existem em um ‘mundo fechado’ difícil de aceitar, sendo, entretanto, difícil dele escapar.” (Balacheff, 2010, p.6/37). É neste sentido que a obtenção de respostas para problemas mediadas pelo computador, particularmente pelo *software* de geometria dinâmica pode ser uma possibilidade de ‘abrir o mundo’ da matemática operando com representações como se fossem objetos reais, facilitando o entendimento de algumas situações matemáticas

Contudo, é interessante observar que ter acesso à tecnologia não é suficiente para se conseguir a compreensão do conteúdo matemático abordado. Quando nos referimos ao problema 1, não foi possível identificar no professor (P1) a validade epistemológica pois entendemos que ao determinar a solução ótima graficamente, o professor apresentou algumas dificuldades como, reconhecer as diferentes representações fornecidas pelo *software* e o uso adequado da ferramenta para a validação da solução.

Em relação ao problema 2, entendemos que o uso do *software* teve uma potencial contribuição para ambas as duplas (D1 e D2). Nesse sentido, no que diz respeito ao *domínio de validade epistemológica*, as duplas se apropriaram das possibilidades apresentadas pelo *software*, seja na construção do gráfico para encontrar o ponto mínimo (D1), seja na manipulação dinâmica da validação da solução obtida (D2). Assim, a construção do conhecimento de um dado conteúdo matemático foi mediada pelo uso do *software*.

Nesse contexto parece se confirmar a assertiva de Balacheff (1994b) de que a interação baseada na percepção (no nosso caso com o *software* de geometria dinâmica) pode ser a fonte de uma problematização rica em significados matemáticos de modo que pode-se concluir que o *software* permite a organização de conceitos matemáticos.

Referências

- BALACHEFF, N.; KAPUT, J. J. Computer-Based Learning Environments in Mathematics. In: BISHOP A.J. et al. (eds). **International Handbook of Mathematics Education**. Kluwer International Handbooks of Education, vol.4. Springer, Dordrecht, p. 469–501, 1996.
- BALACHEFF, N. Didactique et intelligence artificielle. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, vol. 14, La Pensée Sauvage, p. 9 – 42, 1994.
- _____. La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique. In: Artigue M. et al. (eds). **Vingt ans de didactique des mathématiques en France**. RDM, La Pensée Sauvage Editions, p. 364 – 370, 1994b.
- _____. Bridging Knowing and Proving in Mathematics: An essay from a didactical perspective. In: Hanna G., et al. (eds). **Explanation and Proof in Mathematics**, Springer, Boston, p. 115 – 135, 2010.
- BORBA, M. C.; SILVA, R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.
- BORSSOI, A. H. **Modelagem Matemática, Aprendizagem Significativa e Tecnologias: Articulações em diferentes contextos educacionais**. Londrina, 2013. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em ensino de Ciências e Educação Matemática Universidade Estadual de Londrina, 2013.
- GRANDE, A. L.; VAZQUEZ, W. R. Resolução de Problemas de Otimização com o Auxílio do Software GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v.3, n.1, p.23 – 34, 2014.

- HOYOS, V. **Epistemic and semiotic perspectives in the analysis of the use of digital tools for solving optimizations problems in the case of distance teacher education.** In: Proceedings of CERME 10 – Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Dublin City University, 2017.
- MICHAELIS. Dicionário da Língua Portuguesa (online). Disponível em < <https://michaelis.uol.com.br>>. Acesso em 25 ago. 2018.
- RANGEL, S. **Introdução à Construção de Modelos de Otimização Linear e Inteira.** Notas em Matemática Aplicada. São Carlos, SP: SBMAC; São Paulo: Plêiade, p. 18, 2005.
- SANTOS, F. V. **Modelagem Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação: o uso que os alunos fazem do computador em atividades de modelagem.** Londrina, 2008. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em ensino de Ciências e Educação Matemática Universidade Estadual de Londrina, 2008.
- TALL, David. Visualizing differentials in two and three dimensions. In: **Teaching Mathematics and Its Applications**, v.11, n. 1. p. 1 – 7, 199.