O USO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS COMO FACILITADORAS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa
Universidade Estadual do Norte do Paraná
barbara.palharini@uenp.edu.br

Emerson Tortola
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
emersontortola@utfpr.edu.br

Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina
lourdes@uel.br

Resumo
Neste artigo abordamos o uso das tecnologias digitais como auxílio para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática no contexto de uma disciplina de Introdução à Modelagem Matemática em um curso de Licenciatura em Matemática. Por meio de uma análise qualitativa analisamos os diferentes usos das tecnologias digitais no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática *Slackline um show de manobras*. Resultados apontam para os usos das tecnologias digitais como facilitadores e organizadores no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, em particular quando os conteúdos trabalhados são matematicamente complexos. Neste contexto, os alunos lançam mão do uso de *softwares* na coleta de dados, organização e investigação do comportamento dos dados, obtenção de modelos matemáticos e para a análise interpretativa dos resultados obtidos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Tecnologias Digitais. Modelagem Matemática.

Introdução

A importância do acesso das crianças, jovens e adolescentes às tecnologias da informação são colocadas desde o Ensino Fundamental, por meio dos documentos oficiais, de acordo com Brasil (1997, p.30):

> As técnicas, em suas diferentes formas e usos, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas implicações que exercem no cotidiano das pessoas. Estudiosos do tema mostram que escrita, leitura, visão, audição, criação e aprendizagem são capturados por uma informática cada vez mais avançada. Nesse cenário, insere-se mais um desafio para a escola, ou seja, o de como incorporar ao seu trabalho, apoiado na oralidade e na escrita, novas formas de comunicar e conhecer.

No Ensino Médio a Matemática é colocada pelas diretrizes curriculares como uma ferramenta para entender as tecnologias, assim como a tecnologia é colocada como ferramenta para entender a Matemática (PARANÁ, 2008). A formação do aluno, nesse contexto, deve considerar a utilização de calculadoras, planilhas eletrônicas e *software* educacionais, o que, de acordo com os documentos oficiais, são instrumentos dos dias atuais e devem ser disponibilizados para todos os cidadãos.

No âmbito dos cursos de formação de professores e formação em Matemática, as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática abordam a importância de trabalhar com a tecnologia e diferentes abordagens para o Ensino de Matemática.

Ao abordar as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação no ensino de Matemática é importante considerar atividades que possibilitem a utilização de recursos tecnológicos associados à informação e a comunicação, muitas vezes, de ideias matemáticas e conceitos associados ao dia a dia e à realidade dos alunos.

O ambiente para trabalhar com recursos tecnológicos é importante tanto para professores quanto para alunos, mas cabe ao professor proporcionar o contato com a tecnologia da informática por meio de atividades que possibilite aos alunos fazer relações com os conteúdos matemáticos. É nesse contexto que utilizamos a modelagem matemática para a criação do ambiente de aprendizagem juntamente com as tecnologias da informática.

Neste contexto, neste artigo investigamos os usos das tecnologias digitais em atividades de modelagem matemática. Para tanto abordamos as especificidades do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática por dois grupos de alunos em um curso de Licenciatura em Matemática no âmbito da disciplina de Introdução à Modelagem Matemática.

Modelagem Matemática e Tecnologias Digitais

Atividades de modelagem matemática têm como pressupostos a problematização e a investigação de fenômenos pautados na realidade (BARBOSA, 2004). Na perspectiva da Educação Matemática, além dessas características, elas são desenvolvidas com fins didáticos e pedagógicos, e se configuram como uma alternativa às aulas expositivas para se ensinar e se aprender matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). Nesse sentido, espera-se que, além de resolver um problema associado ao fenômeno sob investigação, o estudante ao desenvolver uma atividade de modelagem revise e/ou aprenda novos conceitos matemáticos.

Em linhas gerais, o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática requer a escolha de um fenômeno para investigação, a busca de informações sobre esse fenômeno e a resolução, por meio da matemática, de um problema associado a ele (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). Essa resolução, em geral, se dá a partir da observação de características e de regularidades no comportamento do fenômeno e a partir do uso ou do estabelecimento de uma estrutura matemática, denominada modelo matemático, que incorpora, com certo nível de fidelidade, características essenciais do fenômeno (ALMEIDA; SOUSA; TORTOLA, 2015) e que permite realizar generalizações, descrevendo, explicando e até mesmo fazendo previsões relacionadas ao seu comportamento (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Para o estabelecimento dessa estrutura, os estudantes se valem de variados métodos, procedimentos e conceitos matemáticos, muitas vezes, auxiliados no uso de recursos tecnológicos. É comum o uso de calculadoras gráficas, softwares computacionais e aplicativos de celulares para a análise dos dados e do comportamento do fenômeno. Esse uso, contudo, deve ser mediado pelo professor, para que não se resuma em uma resolução sem reflexão.

De acordo com Maltempi (2008, p. 61), "toda inserção de tecnologia no ambiente de ensino e aprendizagem requer um repensar da prática docente, pois ela não é neutra e transforma a relação ensino-aprendizagem". Dessa forma, ao inserir os dados em um software, identificar qual função se ajusta melhor aos dados pode se tornar simples, já que muitos *software* indicam várias opções de ajustes e o coeficiente de correlação de cada um deles. Mas analisar os dados e decidir qual ajuste é o melhor com base nas características dos fenômenos é uma ação que deve ser prezada em atividades de modelagem matemática. Essa análise deve ser orientada pelo professor, vislumbrando, inclusive, o aprendizado de novos conceitos. "Professores devem ser parceiros na concepção e condução das atividades com TI [tecnologias informáticas] e não meros espectadores e executores de tarefas" (PENTEADO, 2000, p. 29).

Cabe, portanto, ao professor, orientar a reflexão, levar os alunos a pensarem não apenas no uso da matemática para descrever, explicar ou interpretar o fenômeno, mas também para aprender características, definições e usos da matemática. Deve, pois, fazer questionamentos, indicar caminhos, como explicam Almeida e Vertuan (2011), levando os alunos a refletirem quando usar determinados tipos de estruturas como modelos matemáticos, por exemplo, que características do fenômeno indicam que seu comportamento pode ser ajustado a uma função afim, ou, a uma função quadrática, ou a uma função exponencial, etc.? Como escrever matematicamente esse comportamento por meio de uma hipótese e como estruturar o modelo matemático a partir dela? Dessa forma, o uso da tecnologia ao invés de simplificar, pode potencializar o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática (SANTOS, 2008; BORSSOI, 2013).

Aspectos Metodológicos

Com vistas a detalhar os diferentes usos das tecnologias digitais em atividades de modelagem matemática, abordamos neste artigo o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática *Slackline: um show de manobras* realizado por onze alunos de um curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Introdução à Modelagem Matemática[1], divididos em três grupos: G6, G7 e G8 – neste artigo analisamos os registros dos alunos dos grupos G6 e G7.

A análise dos dados é qualitativa, e na medida que detalhamos o desenvolvimento da atividade dos alunos, buscamos evidenciar os usos feitos pelos alunos das tecnologias digitais.

Os usos das tecnologias digitais no desenvolvimento da atividade

Nessa seção, detalhamos o uso das tecnologias digitais no desenvolvimento da atividade *Slackline: um show de manobras*. Inicialmente a professora da disciplina entregou um texto com informações iniciais para o desenvolvimento da atividade (Quadro 1).

Quadro 1 Texto entregue aos alunos para o desenvolvimento da atividade

Slackline: Um Show de manobras Em 2014 o Paraná recebeu o primeiro festival de Slackline do Brasil. O Fórum de Slackline realizado ocorreu em Foz do Iguaçu e teve como objetivo discutir novas práticas do esporte e a criação de uma federação nacional para a atividade. O desafio do slackline é andar, pular, girar, entre outras manobras, pelo maior tempo possível – claro sem ir ao chão – sobre uma fita de náilon presa pelas extremidades em bases fixas, como árvores, postes ou carros. Por aqui o esporte é novidade, mas seu surgimento data da década de 80, nos Estados Unidos. De modo geral, foi inicialmente considerado como uma atividade para o tempo livre a fim de praticar o equilíbrio. Daí a ideia de amarrar as fitas de escalada entre duas árvores e andar sobre a fita. Atualmente, manobras incríveis são executadas em cima da fita e adeptos de todas as idades tentam manter o equilíbrio, sem, é claro, cair no chão. Como esporte quatro são as modalidades disponíveis: waterline, realizado sobre as águas; highline, praticado em grandes alturas, como montanhas, pontes e edifícios; o longline, em que o importante é percorrer uma distância superior a 40 metros; e o trickline, em que as manobras ousadas sob a fita são avaliadas. Se você deseja iniciar a pratica, seja como diversão ou como esporte, o material é vendido nas principais lojas de esporte. Um kit para iniciantes[2] contém: uma fita (geralmente de poliéster) de 10 m ou de 15 m por 5 cm

[1] Quando a professora sugeriu o desenvolvimento da atividade com a temática Slackline, uma das alunas da turma sugeriu que os alunos se reunissem em um sábado para irem até um esportista de slackline, entrevistá-lo, coletar dados e tentar praticar o esporte.

[2] Crianças a partir de 5 anos já podem iniciar a atividade.

(as fitas podem suportar até 4 toneladas), o peso do equipamento varia entre 2,5 kg e 2,7 kg, uma catraca em aço inoxidável com trava de segurança.

Fonte: As informações para o texto foram obtidas a partir da matéria: **Show de manobras:** Paraná recebe primeiro festival de Slackline do Brasil. Por Globo Esporte. Disponível em: <http://globoesporte.globo.com/programas/esporteespetacular>. Acesso em 29/03/18.

Os dados coletados pelos alunos durante a pratica do esporte estão dispostos no Quadro 2.

Quadro 2 Informações Coletadas pelos alunos e sistematizadas pelo grupo G6

Com a ajuda do instrutor que acompanhou a atividade, se obteve medidas e informações do esporte. A fita utilizada na realização da atividade tem como especificações:

Largura	4,4 cm
Comprimentos	15 cm
Componentes de Estrutura	Nylon

O local que foi escolhido foi uma praça. A fita foi presa a duas árvores, uma em cada extremidade da corda. A distância dessas árvores era de 10,5 m. A fita possui em suas extremidades catracas (objetos de tração) como mostra a Figura 5, feitos de metal que permitem esticar a corda até que a mesma esteja ideal para prática do esporte.

Imagem 5 - Catraca

Fonte: Os autores

A fita foi amarrada em uma das árvores a uma altura de 98 cm e outra 92 cm, esses valores não foram definidos propositalmente, buscou-se a mesma medida empiricamente, portanto não foi feita a medição antes de fixar a fita, somente depois por curiosidade dos participantes. Nas Imagens 6 e 7 é possível observar o poste e a árvore em que foi amarrado o *slackline.*

Imagem 6 – Poste

Fonte: Os autores

Imagem 7 - Árvore

Fonte: Os autores

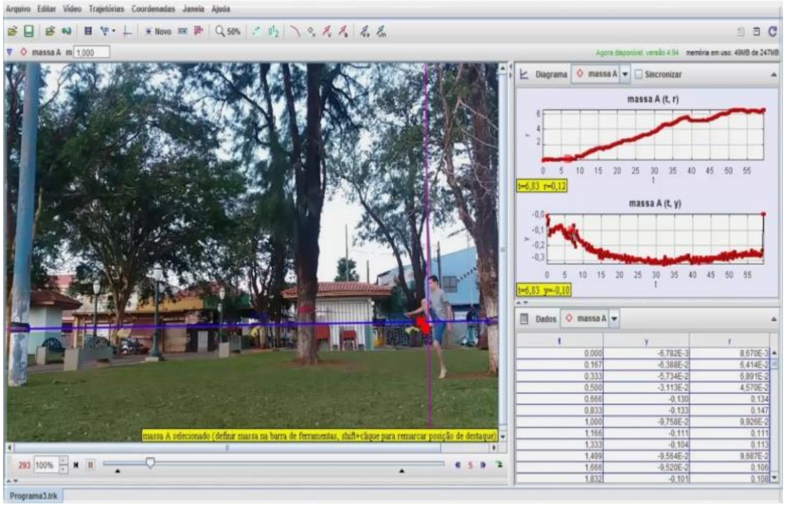
A análise foi realizada com um participante do sexo masculino de 23 anos de idade, 70 kg e 1,85 m de estatura, com um tempo de prática do esporte de quatro meses.

Os instrumentos que foram utilizados para a atividade foram equipamentos profissionais cedidos pelo participante da pesquisa. As fotos e filmagens foram tiradas com câmera de celular.

Para as filmagens posicionamos o celular em uma mesa de modo que o mesmo ficasse fixo, captando todo o movimento do participante enquanto caminhava sobre a fita. Após essa filmagem, utilizamos o *software tracker* para a análise dos dados, ou seja, foram plotados pontos sobre os pés, obtendo tabelas de pontos referente ao tempo (variável independente) e distância percorrida (variável dependente).

Com tal *software* é possível fazer uma análise gráfica, analisando o vídeo de modo a plotar marcações durante todo o trajeto percorrido pelo objeto, ou seja, o participante enquanto praticava o *slackline*. Na Imagem 8 é possível observar a tabela do lado inferior direito e os gráficos acima da tabela.

Imagem 8 – Analisando o vídeo por meio do software tracker



Fonte: Os autores

Fonte: Registro digital entregue pelos alunos.

Já para a coleta de dados os alunos decidiram por filmar a prática do slackline e transpor a filmagem para o *software* tracker[3] a fim de auxiliar na obtenção dos dados enquanto o praticante de slackline se movimenta sobre a fita.

Os alunos A1, A4, B1 e B2, integrantes do grupo G6, intitularam a atividade de "Uma Experiência com Modelagem Matemática: o Estudo da Prática do Slackline" e com base nos dados coletados e nos instrumentos de coleta de dados, foi definido o problema para estudo na atividade de modelagem matemática: *Qual é a função que descreve o espaço percorrido pelo instrutor em um instante t?*

A fim de obter uma solução para essa questão, os alunos analisaram os dados obtidos na coleta por meio de gráficos advindos do *software Tracker*. Após obter os gráficos, o grupo discutiu acerca dos dados criando conjecturas e formularam as hipóteses (Quadro 3).

Quadro 3 Hipóteses formuladas pelos alunos

Hipótese 1: Considerar os pontos plotados durante toda a trajetória sobre os pés como contínuo dentre o intervalo de 0 a 60 segundos; *Hipótese 2*: A função está entre um intervalo de 0 a 60 segundos; *Hipótese 3*: A validação do modelo será por meio da função estabelecida pela linha de tendência no *Excel*.

Fonte: Registro digital entregue pelos alunos.

Durante a formulação de hipóteses, os alunos do grupo G6 tiveram problemas com o ajuste de uma função que descrevesse um intervalo de tempo em que o sujeito da pesquisa

[3] Tracker é um *software* gratuito de vídeo-análise e modelagem. A interface e o download podem ser obtidos em: <https://physlets.org/tracker/>.

percorreu o trajeto da fita. Para sanar tal problema, os alunos fizeram o ajuste de uma curva utilizando os 358 pontos, obtidos com o *Software Tracker*, por meio do *Software Excel*[4], obtendo um polinômio do terceiro grau (Figura 1). O uso do *software* tracker aliado ao *software* Excel possibilita a primeira análise matemática da atividade.

Figura 1 Gráfico da distância percorrida durante a prática do Slackline

Fonte: Registro dos alunos.

Os alunos, utilizando as informações advindas do gráfico, resolveram ajustar uma função polinomial de grau três por meio do uso do Método dos Mínimos Quadrados com o auxílio do *software* Visual Cálculo Numérico[5] - VCN (Quadro 4).

Quadro 4 Ajuste de curvas feito pelos alunos do Grupo G6 – AT7

$$\begin{cases} 358d + \sum_{i=1}^{358} x_i^1 c + \sum_{i=1}^{358} x_i^2 b + \sum_{i=1}^{358} x_i^3 a = \sum_{i=1}^{358} y_i \\ \sum_{i=1}^{358} x_i^1 d + \sum_{i=1}^{358} x_i^2 c + \sum_{i=1}^{358} x_i^3 b + \sum_{i=1}^{358} x_i^4 a = \sum_{i=1}^{358} x_i^1 y_i \\ \sum_{i=1}^{358} x_i^2 d + \sum_{i=1}^{358} x_i^3 c + \sum_{i=1}^{358} x_i^4 b + \sum_{i=1}^{358} x_i^5 a = \sum_{i=1}^{358} x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^{358} x_i^3 d + \sum_{i=1}^{358} x_i^4 c + \sum_{i=1}^{358} x_i^5 b + \sum_{i=1}^{358} x_i^6 a = \sum_{i=1}^{358} x_i^3 y_i \end{cases}$$

Substituindo no Sistema

$$\begin{cases} 358d + 10645{,}454c + 422660{,}7b + 18878662{,}621a = 1254{,}823 \\ 10645{,}454d + 422660{,}7c + 18878662{,}621b + 899454146{,}009a = 51102{,}713 \\ 422660{,}7d + 18878662{,}621c + 899454146{,}009b + 44639087995{,}762a = 2282475{,}552 \\ 18878662{,}621d + 899454146{,}009c + 44639087995{,}762b + 2278692735722{,}26a = 108062472{,}653 \end{cases}$$

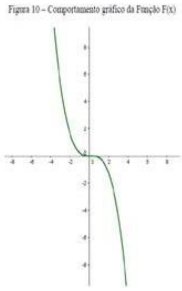
Resolvendo por meio do software VCN esse sistema, é possível encontrar os parâmetros a, b, c e d tal que a Figura 9 mostra o cálculo desenvolvido pelo *software*:

Substituindo os dados na forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$ obtemos a seguinte função dentre o intervalo 0 a 60 que é o tempo percorrido pelo sujeito da pesquisa enquanto andava pela fita.

$$F(x) = -0{,}183x^3 + 0{,}049x^2 + 0{,}005x - 0{,}00006$$

Percebemos que essa função não corresponde a função na qual o *Excel* mostrou pela linha de tendência, quando colocada no *software Geogebra*, a mesma tem um comportamento gráfico diferente, ou seja, a Figura 10 representa tal comportamento.

Figura 10 – Comportamento gráfico da Função F(x)



Fonte: Os autores

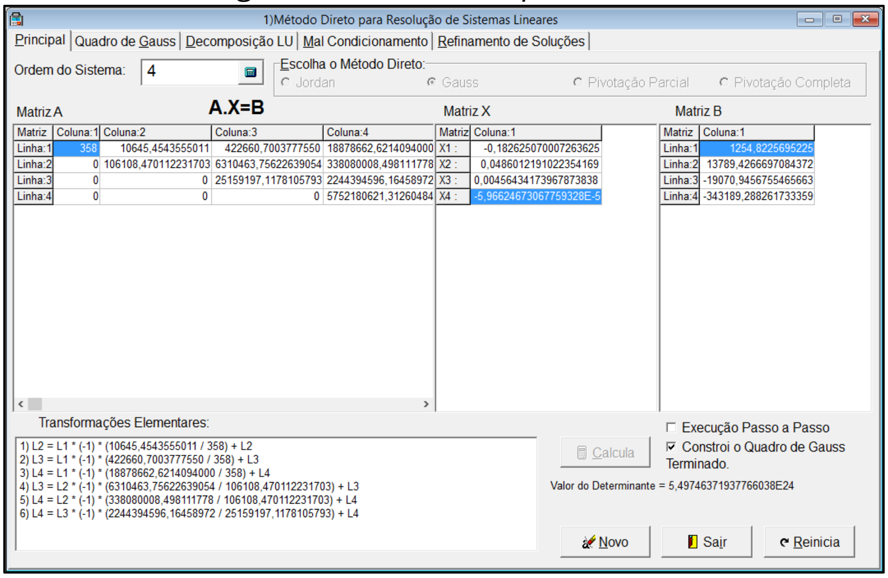
Fonte: Registro digital entregue pelos alunos.

---

[4] O Microsoft Excel é um *software*, de acesso restrito, desenvolvido pela Microsoft para Windows, macOS, Android e iOS. A interface e o download podem ser obtidos em: < https://products.office.com/en/excel>.
[5] O Visual Cálculo Numérico, também conhecido como VCN, é um software de Cálculo Numérico disponível em <http://www.matematica.pucminas.br/lcn/vcn1.htm>.

Para resolver o sistema de quatro incógnitas e quatro equações, os alunos do grupo G6 utilizaram o *software* VCN. A interface do *software* (Figura 5) mostra o método direto para resolução de sistemas lineares, a matriz dos coeficientes, das incógnitas e dos resultados.

Figura 5 Interface do *software* VCN



Fonte: Registros entregues pelos alunos.

Ao comparar a função obtida por meio do ajuste com o gráfico inicial, os alunos se “espantam” com a diferença no comportamento das duas funções e suas conclusões são baseadas nessa diferença, à qual atribuem o insucesso da atividade de modelagem matemática.

> *Dado o exposto, não foi possível encontrar um modelo que satisfaça o problema procurado, talvez o grupo esteja errando na interpretação dos dados visto que o modelo encontrado por meio do método dos mínimos quadrados não bate com a da linha de tendência explicitado no Excel.*
>
> Registro áudio-gravado dos alunos do grupo G6 durante a comunicação da atividade.

Neste contexto, a análise do *software* Excel permite aos alunos uma nova consideração matemática acerca dos dados da atividade. Sua atuação é no sentido de validação das conjecturas iniciais.

Mesmo não considerando o ajuste da curva bom para representar a distância percorrida pelo praticante de Slackline, naquele caso específico, os alunos enfatizam em suas conclusões os itens especificados no Quadro 5.

Quadro 5 Conclusões dos alunos do Grupo G6 – AT7

[...] a referida atividade foi pertinente em relação ao desenvolvimento do grupo, uma vez que, desde a coleta de dados, desenvolvimento e a busca do modelo, percebemos um aprendizado acerca de vários fatores, a saber, o esporte Slackline, trabalhar com software como recurso auxiliador nos cálculos matemáticos, método dos mínimos quadrados, discussões sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, dentre outros.

Fonte: Registro digital entregue pelos alunos.

Os alunos A2, A3, B3 e C4 do grupo G7 denominaram a atividade desenvolvida por eles de “Slackline: esporte e modelagem matemática”. Os dados coletados e enfatizados pelos alunos do grupo G7 foram: a altura dos pontos de âncora; da fita em relação ao solo – no caso foram utilizadas duas árvores; a distância entre uma árvore e outra; a altura da fita quando em uma distância media entre as árvores; a entrevista feita com os praticantes e disponibilizada para a turma, fotos e vídeos. A partir das informações disponíveis os alunos formularam a situação-problema para estudo: *Qual curva demonstra a altura em que praticante se encontra do chão em qualquer distância que o mesmo estiver dos pontos de âncora? Podemos denotar a altura mesmo que as massas dos praticantes se alterem?*

Para o desenvolvimento da atividade os alunos tentaram relacionar conceitos da disciplina de EDO, especificamente sobre aplicações de EDOs de segunda ordem em fios de rede elétrica. Nesse sentido, os alunos relacionaram a curva denominada catenária com a curva formada pela fita do Slackline, veja a argumentação dos alunos do grupo G7 sobre o uso deste conceito matemático no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática:

> *Embora a ideia da catenária tenha sido a inicial, tivemos dúvidas quanto aos dados que devíamos utilizar e dificuldades para compreender a dedução.*
> *Muitos estudiosos confundiram a curva catenária com uma parábola, mas mesmo sabendo disso tentamos ajustar a curva projetada pela fita do slackline por meio de uma função quadrática.*

Registro áudio-gravado dos alunos do grupo G7 durante comunicação da atividade.

Segundo os alunos do grupo G7, a formulação de hipóteses ocorreu por meio de questões e reflexões relacionadas a observação no dia da coleta de dados e também de leituras realizadas para sanar dúvidas sobre a prática do Slackline (Quadro 6).

Quadro 6 Hipóteses formuladas pelos alunos

Hipótese 1: Quanto maior a distância entre os pontos de âncora, mais tremula a fita ficará.
Hipótese 2: supondo que uma pessoa de massa igual a 68 quilogramas esteja a 5 metros da posição inicial a altura que ela se encontra do chão é de 0,72 m.
Hipótese 3: O modelo de ajuste quadrático implica em utilizar os dados fornecidos, pois a massa utilizada não pode ter variação.
Hipótese 4: um fio flexível, fixos em dois pontos distintos pode ter o comportamento descrito por uma curva catenária.
Hipótese 5: Na literatura a curva catenária é diferenciada da curva quadrática, neste caso a melhor representação na opinião do grupo seria a catenária.
Hipótese 6: uma massa qualquer pode influenciar nos modelos.

Fonte: Registro digital entregue pelos alunos.

A partir da formulação de hipóteses os alunos se dedicaram ao desenvolvimento de três modelos matemáticos que pudessem auxiliá-los na resposta à situação-problema levantada. O primeiro modelo matemático dizia respeito à possibilidade de usar a modelagem matemática para ao ensino de Matemática no Ensino Médio por meio do ajuste a uma função quadrática. O segundo modelo matemático deduzido pelos alunos do grupo G7 foi obtido como uma forma alternativa de resolução da situação-problema colocada, por meio de uma analogia com questões já estudadas na disciplina de Cálculo Numérico (Quadro 7).

Quadro 7 Dedução Modelo 2 dos alunos do grupo G7 – AT7

Método de Interpolação de Lagrange

Conceito: Publicado por Joseph Louis Lagrange em 1795, neste método o polinômio interpola uma função em um conjunto de pontos distintos (xi, yi), $i = 0, 1, \ldots, n$ representada na seguinte forma:

$$P_n(x) = b0\,P0(x) + b1\,P1(x) + \ldots\, bi\,Pi(x) + \ldots + bn\,Pn\,(x)$$

Utilizando a Tabela 2, temos:

$y_0 = 0{,}98 \quad x_0 = 0$

$y_1 = 0{,}72 \quad x_1 = 5$

$y_2 = 0{,}92 \quad x_2 = 10{,}5$

Identificação das Variáveis:

y_0 e y_2: Altura da fita ancorada nas duas árvores em metros;

y_1: Altura da fita em metros, de um ponto com pessoa de massa (68kg);

x_0, x_1 e x_2: Distância no solo (equivale a distância percorrida pelo praticante);

$P_2(x)$: Polinômio interpolador de grau dois

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_2 \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{2} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad y_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$0{,}98 \cdot \frac{(x - 5)(x - 10{,}5)}{(0 - 5)(0 - 10{,}5)} + 0{,}72 \cdot \frac{(x - 0)(x - 10{,}5)}{(5 - 0)(5 - 10{,}5)} + 0{,}92 \cdot \frac{(x - 0)(x - 5)}{(10{,}5 - 0)(10{,}5 - 5)}$$

Polinômio Interpolador:

$$P_2(x) = 0{,}008x^2 - 0{,}94x + 0{,}98$$

Fonte: Registro dos alunos.

A fim de utilizar as informações obtidas por meio da os alunos idealizaram uma situação a ser respondida por meio da Matemática estudada (Quadro 8).

Quadro 8 Situação idealizada pelos alunos a partir da problemática inicial

Supondo que a mesma pessoa (ou de massa igual) esteja a 3 m do ponto inicial da corda, qual será a altura da corda em relação ao chão? Resp. 0,77m ou 77cm Será possível calcular essa altura da corda em relação ao chão para qualquer pessoa (ou seja, de massas diferentes)?

Fonte: Registro digital entregue pelos alunos.

Neste contexto, abordaram uma possível resolução das questões idealizadas (Quadro 9).

Quadro 9 Uso do modelo 2 para interpretar a situação-problema – AT7

Uma possível maneira de calcular:

A massa da pessoa utilizada na equação modelo é de 68 $quilogramas$ e lembrando que a corda ficou a $72cm$ do chão, podemos fazer a razão entre uma outra massa (qualquer pessoa), como por exemplo no dado coletado de uma mulher de massa 57 $quilogramas$ e que a corda ficou a $75cm$ do chão. Assim:

$\frac{68}{57} = 1{,}2$ e faz a diferença entre as alturas: $|72 - 75| = 3cm$. Pode ser feita agora uma relação: $\frac{68}{m} = x$ em que $m = massa$ e $x = razão\ das\ massas$, assim se $x > 1{,}2$ faz se a soma de 3 cm mais o valor de outra relação que será apresentada agora: usando regra de três simples, se

$$1{,}2\ \ equivale\ a\ 3\ cm, quan□o\ valerá\ \ a\ razão\ da\ nova\ massa?$$

Numericamente:

Supondo uma pessoa de massa 65 $quilogramas$, faz a razão das massas: $\frac{68}{65} = 1{,}04$, agora usando a regra de três:

$$1{,}2\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_3cm$$
$$1{,}04\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ycm$$
$$y = 2{,}6c□$$

Como $1{,}04 < 1{,}2$, subtrai esse valor $(2{,}6cm)$ de $75cm$ obtendo a altura da corda em relação ao solo de acordo dom sua massa que será de $(75cm - 2{,}6cm = 72{,}4cm)$. Então o modelo para esse cálculo será:

$$(1)\ \frac{\left[\left(\frac{68}{m}\right).3\right]}{1{,}2} = valor\ a\ ser\ so□ado\ ao\ subtraido\ de\ 75cm;$$

Como dito antes quando $x > 1{,}2$ faz a soma, quando $x < 1{,}2$ faz a subtração e $x = 1{,}2$ soma-se o valor encontrado (da expressão 1) a $72cm$.

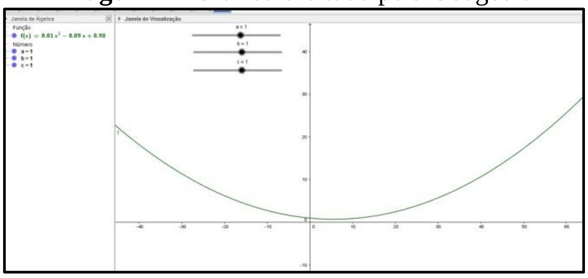
Quando $m > 68$, o cálculo deve ser feito da seguinte maneira: pega a expressão (1) faz a substituição da massa e o valor encontrado subtrai de $3cm$ e o resultado dessa subtração é ainda subtraída de $72cm$.

Tabela 3 – dados em relação as massas

Massa (Kg)	Altura da corda até o chão (cm)
68	72
57	75
65	72,4

O gráfico que representa o polinômio interpolador de Lagrange, pode ser visto pela Imagem 4:

Imagem 4 – Gráfico ofertado pelo Geogebra



Fonte: os autores

Fonte: Registro dos alunos do grupo G7.

O terceiro modelo matemático utilizado para possível solução da situação-problema foi utilizado devido à crença dos alunos do grupo G7 de que o modelo matemático associado à curva catenária seria o "mais" adequado para a situação-problema (Quadro 10).

Quadro 10 Interpretação dos alunos para a situação-problema a partir dos modelos formulados

Mesmo encontrando outros tipos de curvas para solucionar a situação-problema, acreditamos que a catenária corresponde melhor ao que está sendo estudado "uma característica da catenária é que uma força aplicada em um ponto qualquer da curva é dividida igualmente por todo o material, isto é, é distribuída uniformemente ao longo da curva" (TEIXEIRA, 2012, p. 79).

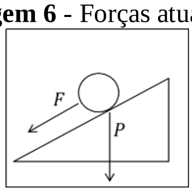
Fonte: Registro digital entregue pelos alunos.

Com base nessas considerações os alunos do grupo G7 evidenciaram a dedução da equação que descreve a catenária. Os mesmos relataram dificuldades no entendimento das deduções apresentadas em livros texto e buscaram auxílio com a professora, em artigos e vídeos disponíveis on line (Quadro 11).

Quadro 11 Dedução do Modelo 3, grupo G7 – AT7

Lembrando-se das forças - Figura 6:

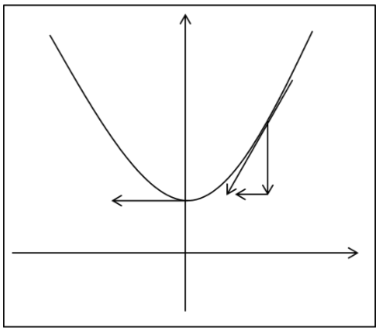
Imagem 6 - Forças atuantes.



Fonte: Os autores

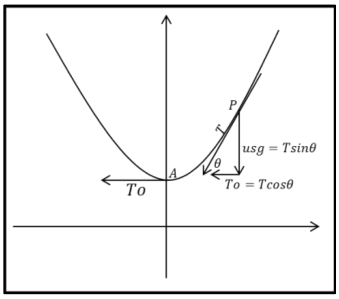
Logo as forças atuantes são: $F = m * a$ e $P = m * g$ em que $F = força$, $P = força\ peso$, $m = massa$, $a = aceleração$ e $= gravidade$. Essas forças são necessárias para a compreensão da dedução da curva da catenária. Na Imagem 7 temos os vetores de força que atuam na curva da catenária. Na imagem 8 serão dados os nomes dos pontos, dos vetores, e a tração existente.

Imagem 7: Vetores atuantes na curva catenária.



Fonte: Os autores

Imagem 8: Vetores e forças com seus respetivos nomes.



Fonte: Os autores.

Da Figura 8 tem-se então:

- $Peso\ da\ secção\ AP = usg$;
- $u = massa\ por\ unidade\ de\ comprimeno$;
- $s = comprimento\ do\ arco\ AP$;
- $g = gravidade$;
- $T = tração$
- $To = T.cos\theta$
- $usg = Tsin\theta$

Assim as duas equações que serão utilizadas para a dedução:

(1) $usg = Tsin\theta$ e (2) $= Tan\theta = \frac{usg}{To}$,

Lembrando que To sempre será a mesma em cada ponto da catenária devido ao fato das forças externas agirem na mesma massa gravitacional que é vertical, desta forma é introduzido a constante $a = \frac{To}{ug}$, assim a equação (1) e (2) ficam:

- Vetor T, $T = ug\sqrt{s^2 + a^2}$; e $s = a.Tang\theta$ → equação intrínseca da catenária;

Tem-se ainda que:

$$y' = \frac{dy}{dx} = tang\theta = \frac{s}{a};$$

em que $\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a}$, (x, y) → expresso por coordenadas retangular, faz a derivada segunda de dy em relação a x:

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{dy'}{dx} = \frac{1ds}{adx} \ (3);$$

e sabendo que a diferença de comprimento dos arcos "ds" pode ser expresso como uma relação pitagórica $ds = dx\sqrt{1 + (y')^2}$ faz-se a substituição em (3):

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dx\sqrt{1 + (y')^2}}{adx}$$

separando e simplificando as variáveis tem-se:

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{dx}{adx}$$

integrando ambos os lados:

$$\int \frac{dy'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \int \frac{dx}{adx};$$

$$\sinh^{-1}.(y') = \frac{x}{a};$$

$$(y') = \frac{x}{a}.sinh;$$

Que torna:

$$\frac{dy}{dx} = \sinh.\left(\frac{x}{a}\right) \quad e\ dy = \sinh\left(\frac{x}{a}\right).dx;$$

integrando novamente ambos os lados:

$$\int dy = \int \sinh\left(\frac{x}{a}\right).dx\,;$$

$$y = a.\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + c;$$

e para determinar o menor ponto da catenária "a" acima da origem, adota-se $c = 0$, logo a equação que descreve a curva da catenária é:

$$y = a.\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Fonte: Registros dos alunos do grupo G7.

No estudo e na dedução da catenária – Figura 8, as tecnologias digitais auxiliam os alunos no desenvolvimento das representações gráficas acerca da curva desejada.

Discussão dos resultados e palavras finais: fomentando o debate

A análise de fenômenos por meio de dados numéricos pode ser útil para descrever tendências, fazer previsões e validar relações funcionais entre variáveis dependentes e independentes (BASSANEZI, 2002). Na atividade de modelagem matemática desenvolvida pelos alunos diferentes *software* foram utilizados como Excel, Tracker, VCN e o GeoGebra. Neste tópico consideramos o uso feito pelos alunos, considerando os usos da linguagem, as conjecturas e hipóteses formuladas e o uso de conceitos matemáticos.

Atualmente, o recurso às tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem de Matemática é algo comum e que, de certo modo, faz parte da forma de vida partilhada pelos alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática.

No desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, a partir de um conjunto de dados coletados, os alunos do grupo G6 utilizaram de dois *software* para tratar os dados coletados, do *software Tracker* e do *software Excel*. O uso dos mesmos, no entanto, coloca os alunos em busca de um modelo polinomial que descreva a função do espaço percorrido pelo instrutor do Slackline em qualquer espaço de tempo. O uso do *software Tracker* se dá para tratar as informações obtidas com um vídeo do instrutor praticando Slackline, e o uso do *software Excel* indica, a partir dos dados coletados no *Tracker,* a curva polinomial como sendo o melhor ajuste para o conjunto de dados. O uso do próprio *Excel* já sinaliza a linha de tendência da função polinomial indicada, no entanto os alunos do grupo G6 veem como importante apresentar deduzir os passos do procedimento matemático associado ao ajuste dos pontos coletados à linha de tendência polinomial de grau três.

Por meio da dedução do método dos mínimos quadrados, os alunos obtêm um sistema contendo quatro equações e quatro incógnitas. Este sistema, de difícil solução manual, é resolvido utilizando o *software VCN*, cuja utilização estava sendo feita nas aulas da disciplina de cálculo numérico. O processo de validação é feito com base na comparação da função matemática identificada no *software Excel*.

Os alunos do grupo G7 utilizam de duas regras matemáticas para ajustar a curva que representa (apresenta) a fita utilizada na prática do slackline, a qual fica presa em dois pontos fixos. Eles sinalizam que matematicamente a curva que mais se ajusta às características da fita seria a *catenária* e que muitos estudiosos confundiram essa curva com a “aparência” de uma parábola e, neste sentido, este poderia ser um possível modo de ver utilizando a Matemática.

Utilizando dados e suposições fundamentadas na situação-problema os alunos deduzem uma função quadrática utilizando de dois procedimentos matemáticos. Um para utilização em situações de ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio, por meio da utilização de três pontos observados na situação-problema é possível elaborar um sistema de três equações e três incógnitas e obter a função de segundo grau. E, um segundo modelo matemático obtido como uma forma alternativa de resolução da situação-problema colocada, por meio do uso do método de interpolação de Lagrange.

Neste contexto, os usos das tecnologias digitais, em particular dos *software*, auxilia na estruturação, organização e análise dos dados, bem como no desenvolvimento matemático, seja para resolução de sistemas de equações, seja no ajuste de curvas. A facilitação no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática utilizada como exemplo, pode ser vista desde o tratamento inicial pelo uso do *software Tracker*, até a análise matemática proporcionada pelo recurso ao ajuste de curvas no *Excel*, bem como na visualização e análise gráfica das soluções obtidas no desenvolvimento analítico dos modelos matemáticos – como no caso da dedução da catenária.

Referências

ALMEIDA, L. M. W.; SOUSA, B. N. P. A.; TORTOLA, E. Desdobramentos para a modelagem matemática decorrentes da formulação de hipóteses. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais**... Pirenópolis: SBEM, 2015.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. **Discussões sobre "como fazer" Modelagem Matemática na sala de aula**. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Orgs.). Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2011. p. 19-43.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

BARBOSA, J. C. **Modelagem matemática**: O que é? Por que? Como? Veritati, Salvador, n. 4, p. 73- 80, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**. Editora Contexto, São Paulo, 2002.

BORSSOI, A. H. **Modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias**: articulações em diferentes contextos educacionais. 2013. 255 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

MALTEMPI, M. V. Educação matemática e tecnologias digitais: reflexões sobre prática e formação docente. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 10, n. 1, p.59-67, jan./jun. 2008.

PARANÁ. **Diretrizes curriculares da educação básica do estado do Paraná**: matemática. Curitiba: SEED, 2008.

PENTEADO, M. **Possibilidades para a formação de professores de matemática**. In: PENTEADO, M. G.; BORBA, M. C. (Orgs.). A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão. São Paulo: Olho d'água, 2000. p. 23-34.

SANTOS, F. V. **Modelagem matemática e Tecnologias da Informação e Comunicação**: o uso que os alunos fazem do computador em atividades de modelagem. 2008. 176 f.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2008.